

تصحيح التمرين الأول

.1

✓ لدينا :  $E \subset M_2 \mathbb{R}$

و  $E \neq \emptyset$  (  $I = M_{1,0}$  لأن  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in E$  )

لتكن  $M_{x,y}$  و  $M_{a,b}$  من  $E$  وليكن  $\alpha$  و  $\beta$  من  $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \alpha M_{a,b} + \beta M_{x,y} &= \alpha \begin{pmatrix} a & -3b \\ b & a \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} x & -3y \\ y & x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha a + \beta x & -3\alpha b + \beta y \\ \alpha b + \beta y & \alpha a + \beta x \end{pmatrix} \\ &= M_{\alpha a + \beta x, \alpha b + \beta y} \in E \end{aligned}$$

$$\alpha a + \beta x, \alpha b + \beta y \in \mathbb{R}^2$$

إذن :  $E$  فضاء متجهي جزئي من  $M_2 \mathbb{R}, +, \cdot$

✓

• لتكن  $M_{x,y}$  من  $E$

$$\begin{aligned} M_{x,y} &= \begin{pmatrix} x & -3y \\ y & x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3y \\ y & 0 \end{pmatrix} \\ &= x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= x.I + y.J \end{aligned}$$

إذن  $I, J$  أسرة مولدة للفضاء  $E$

• ليكن  $\alpha$  و  $\beta$  من  $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \alpha.I + \beta.J = O &\Rightarrow M_{\alpha, \beta} = O \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha & -3\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

إذن  $I, J$  أسرة حرة للفضاء  $E$

وبالتالي  $I, J$  أساس للفضاء  $E$   
و منه  $\dim E = \text{card } I, J = 2$

2. أ) لنبين أن  $E$  جزء مستقر من  $\times, \mathbb{R} M_2$

لدينا :  $E \neq \emptyset$  و  $E \subset M_2 \mathbb{R}$

لتكن  $M x, y$  و  $M a, b$  من  $E$

$$\begin{aligned} M a, b \times M x, y &= \begin{pmatrix} a & -3b \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & -3y \\ y & x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax-3by & -3ay-3bx \\ bx+ay & -3by+ax \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax-3by & -3ay+bx \\ ay+bx & ax-3by \end{pmatrix} \\ &= M ax-3by, ay+bx \in E \end{aligned}$$

$$ax-3by, ay+bx \in \mathbb{R}^2$$

إذن  $E$  جزء مستقر من  $\times, \mathbb{R} M_2$

ب) لنبين أن  $E, +, \times$  حلقة واحدة وتبادلية



✓  $E, +$  زمرة تبادلية ( لأن  $E, +, \cdot$  فضاء متجهي )

✓ بما أن  $E$  جزء مستقر من  $\times, \mathbb{R} M_2$  و  $\times$  تجميعي وتوزيعي بالنسبة ل  $+$  في  $\mathbb{R} M_2$

فإن  $\times$  تجميعي وتوزيعي بالنسبة ل  $+$  في  $E$

إذن  $E, +, \times$  حلقة



✓  $I = M 1, 0$  هو العنصر المحايد بالنسبة ل  $\times$

إذن  $E, +, \times$  حلقة واحدة



✓  $\times$  تبادلي في  $E$

لتكن  $M x, y$  و  $M a, b$  من  $E$

لدينا :  $M a, b \times M x, y = M ax-3by, ay+bx$

و :  $M x, y \times M a, b = M xa-3yb, xb+ya$

إذن لكل  $M a, b$  و  $M x, y$  من  $E$  :  $M a, b \times M x, y = M x, y \times M a, b$

وبالتالي :  $E, +, \times$  حلقة واحدة وتبادلية

3. أ)

❖ ليكن  $a, b$  و  $x, y$  من  $\mathbb{R}^2$

$$\varphi a+ib \times x+iy = \varphi ax-by + i ay+bx = M \left( ax-by, \frac{ay+bx}{\sqrt{3}} \right) \checkmark$$

$$\begin{aligned} \varphi a+ib \times \varphi x+iy &= M \left( a, \frac{b}{\sqrt{3}} \right) \times M \left( x, \frac{y}{\sqrt{3}} \right) \\ &= M \left( ax-3 \times \frac{b}{\sqrt{3}} \times \frac{y}{\sqrt{3}}, a \times \frac{y}{\sqrt{3}} + \frac{b}{\sqrt{3}} \times x \right) \checkmark \\ &= M \left( ax-by, \frac{ay+bx}{\sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

إذن  $\varphi$  تشاكل من  $\mathbb{C}^*, \times$  نحو  $E^*, \times$

❖ ليكن  $M a, b$  من  $E^*$

لنحل المعادلة :  $\varphi x+iy = M a, b$

$$\varphi x+iy = M a, b \Leftrightarrow M \left( x, \frac{y}{\sqrt{3}} \right) = M a, b$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ \frac{y}{\sqrt{3}} = b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = b\sqrt{3} \end{cases}$$

إذن لكل  $M a, b$  من  $E^*$  يوجد زوج وحيد  $x, y = a, b\sqrt{3}$  من  $\mathbb{R}^2$  بحيث :

$$\varphi x+iy = M a, b$$

ومنه  $\varphi$  تقابل من  $\mathbb{C}^*$  نحو  $E^*$

و بالتالي :  $\varphi$  تشاكل تقابلي من  $\mathbb{C}^*, \times$  نحو  $E^*, \times$

(ب) بما أن  $\varphi$  تشاكل تقابلي من  $\mathbb{C}^*, \times$  نحو  $E^*, \times$  و  $\mathbb{C}^*, \times$  زمرة تبادلية فإن  $E^*, \times$  زمرة تبادلية

(ج)

$$\begin{aligned}
 J^{2017} &= M(0, 1)^{2017} \\
 &= \left( M \left( 0, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \right) \right)^{2017} \\
 &= \varphi(0 + i\sqrt{3})^{2017} \\
 &= \varphi(i\sqrt{3})^{2017} \\
 &= \varphi(\sqrt{3}^{2017} \times i) \\
 &= \varphi(\sqrt{3}^{2016} \sqrt{3} \times i) \\
 &= \varphi(3^{1008} \sqrt{3} \times i)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J^{2017^{-1}} &= \varphi(3^{1008} \sqrt{3} \times i)^{-1} \\
 &= \varphi(3^{1008} \sqrt{3} \times i)^{-1} \\
 &= \varphi\left(\frac{1}{3^{1008} \sqrt{3} \times i}\right) \\
 &= \varphi\left(\frac{-i}{3^{1008} \sqrt{3}}\right) \\
 &= \varphi\left(0 + i\left(\frac{-1}{3^{1008} \sqrt{3}}\right)\right) \\
 &= M\left(0, \frac{-\sqrt{3}}{3^{1008} \times \sqrt{3}}\right) \\
 &= M\left(0, \frac{-1}{3^{1008}}\right)
 \end{aligned}$$

.4

✓ لدينا  $E, +, \times$  حلقة واحدة وتبادلية

✓ إذن يكفي أن نبين أن كل عنصر  $x, y$  من  $M$  يقبل مقلوبا  $E^*$

ليكن  $x, y$  من  $E$  بحيث:  $M(x, y) \neq M(0, 0)$

$$M_{x,y} = \begin{pmatrix} x & -3y \\ y & x \end{pmatrix} \text{ لدينا}$$

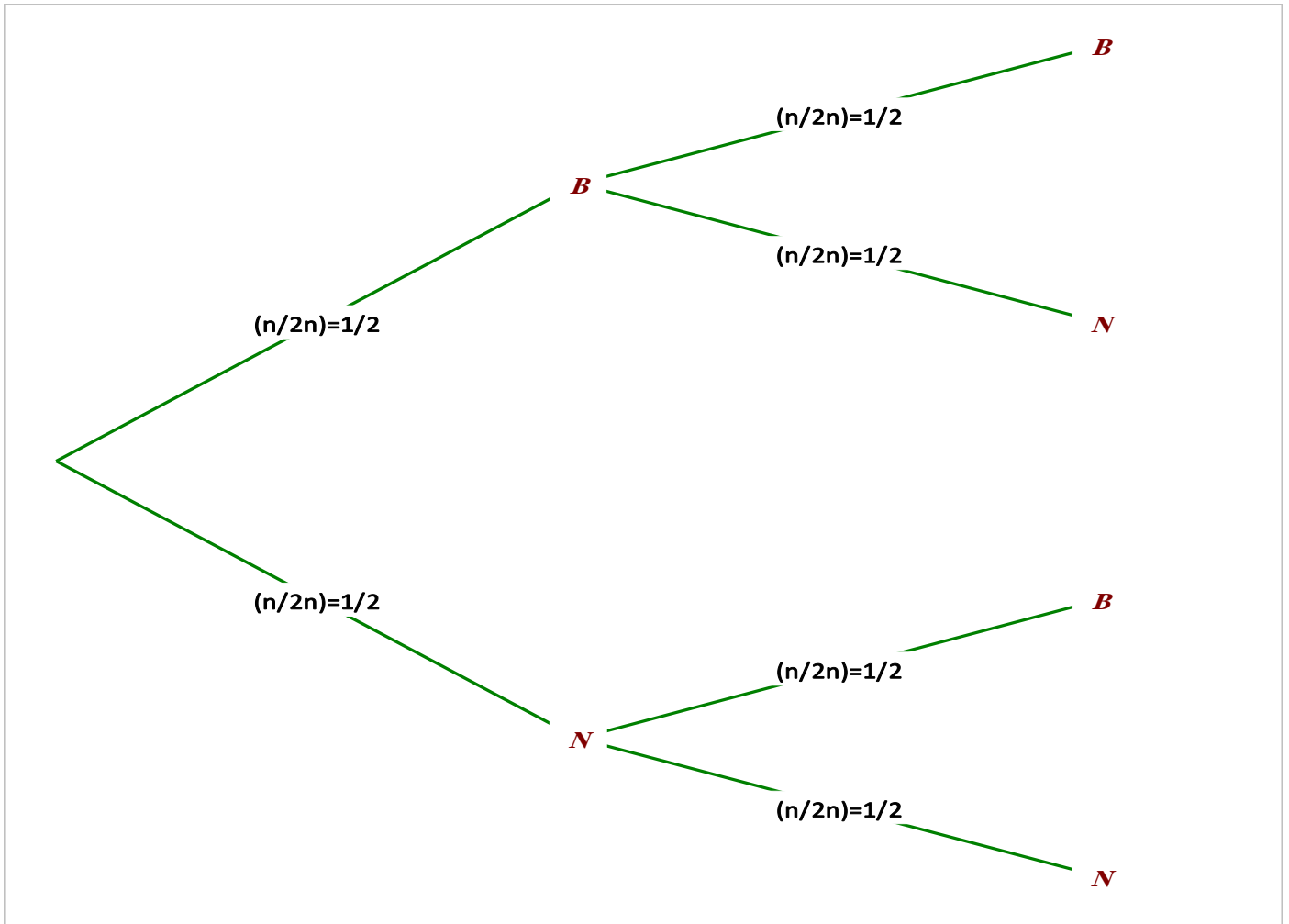
$$\det M_{x,y} = \begin{vmatrix} x & -3y \\ y & x \end{vmatrix} = x^2 + 3y^2$$

إذن  $\det M_{x,y} \neq 0$  ( لأن  $x, y \neq 0,0$  )

$$M_{x,y}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+3y^2} & \frac{3y}{x^2+3y^2} \\ \frac{-y}{x^2+3y^2} & \frac{x}{x^2+3y^2} \end{pmatrix} = M \left( \frac{x}{x^2+3y^2}, \frac{-y}{x^2+3y^2} \right) \in E^*$$

و بالتالي :  $E, +, \times$  جسم تبادلي.

### تصحيح التمرين الثاني



1. ليكن الحدث  $E$  " ربح 20 نقطة " بمعنى لون الكرتين المسحوبتين أبيض

$$p E = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

ليكن الحدث  $F$  " خسارة 20 نقطة " بمعنى لون الكرتين المسحوبتين أسود

$$p F = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

ليكن الحدث  $G$  " الربح منعدم " بمعنى الكرتان المسحوبتان مختلفتي اللون

$$p G = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

2. أ) لنحسب احتمال ربح 100 نقطة بمعنى تحقق الحدث  $E$  خمس مرات

$$C_5^5 p E^5 (1-p E)^{5-5} = 1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^5 \times \left(\frac{3}{4}\right)^0 = \left(\frac{1}{4}\right)^5$$

ب) لنحسب احتمال ربح 40 نقطة بمعنى تحقق الحدث  $E$  مرتين

$$C_5^2 p E^2 (1-p E)^{5-2} = 10 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{270}{1024} = \frac{135}{512}$$

$$p X = -20 = p F = \frac{1}{4} \quad (أ) \quad 3.$$

$$p X = 0 = p G = \frac{1}{2}$$

$$p X = 20 = p E = \frac{1}{4}$$

قانون احتمال  $X$

$x_i$	-20	0	20
$p X = x_i$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

ب) الأمل الرياضي :

$$E X = \left(-20 \times \frac{1}{4}\right) + \left(0 \times \frac{1}{2}\right) + \left(20 \times \frac{1}{4}\right) = 0$$

تصحيح التمرين الثالث

1. ليكن  $z \in \mathbb{C}^*$

$M'$  و  $M$  منطقتين تكافئ  $z' = z$

$$\frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right) = z \text{ تكافئ}$$

$$z = \frac{1}{z} \text{ تكافئ}$$

$$z^2 = 1 \text{ تكافئ}$$

$$z = 1 \text{ أو } z = -1 \text{ تكافئ}$$

2. ليكن  $z \in \mathbb{C}^* - \{-1, 1\}$

$$\begin{aligned} \frac{z'+1}{z'-1} &= \frac{\frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right) + 1}{\frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right) - 1} \\ &= \frac{z + \frac{1}{z} + 2}{z + \frac{1}{z} - 2} \\ &= \frac{z^2 + 1 + 2z}{z^2 + 1 - 2z} \\ &= \frac{(z+1)^2}{(z-1)^2} \end{aligned}$$

$$\text{إذن } \frac{z'+1}{z'-1} = \left( \frac{z+1}{z-1} \right)^2 \text{ لكل } z \text{ من } \mathbb{C}^* - \{-1, 1\}$$

3. ليكن  $\Delta$  واسط القطعة  $AB$

نفترض أن  $M$  تنتمي إلى  $\Delta$

$$\text{إذن } AM = BM$$

$$M \neq A \quad \frac{BM}{AM} = 1 \text{ إذن}$$

لنبين أن  $M'$  تنتمي إلى  $\Delta$

$$\frac{BM'}{AM'} = \frac{|z'+1|}{|z'-1|} = \frac{|z'+1|}{|z'-1|} = \left| \frac{z+1}{z-1} \right|^2 = \left( \frac{|z+1|}{|z-1|} \right)^2 = \left( \frac{BM}{AM} \right)^2 = 1^2 = 1$$

إذن  $AM' = BM'$

و منه  $M'$  تنتمي إلى  $\Delta$

4. لتكن  $\Gamma$  الدائرة التي أحد أقطارها  $AB$

نفترض أن  $M$  تنتمي إلى  $\Gamma$

$$(\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM}) \quad \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM} \equiv \frac{\pi}{2} \pi$$

$$\arg\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \pi$$

لنبين أن  $M'$  تنتمي إلى  $AB$

$$\left(\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{BM'}\right) \equiv \arg\left(\frac{z'+1}{z'-1}\right) 2\pi$$

$$\equiv \arg\left(\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2\right) 2\pi$$

$$\equiv 2 \arg\left(\frac{z+1}{z-1}\right) 2\pi$$

$$\equiv \pi 2\pi$$

إذن  $A$  و  $B$  و  $M'$  نقط مستقيمة و منه  $M'$  تنتمي إلى  $AB$

$$\arg\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \pi \quad \text{لأن}$$

### تصحيح التمرين الرابع

#### الجزء الأول :

لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة على  $I = 0, +\infty$  بما يلي :

$$\forall x \in 0, +\infty \quad f(x) = \frac{\text{Arc tan } x}{x} \quad \text{و} \quad f(0) = 1$$

1. لنبين أن  $f$  متصلة على المجال  $I$

✓ لندرس اتصال  $f$  في 0 على اليمين

$$f(0) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{Arc tan } x}{x} = 1 \quad \text{و}$$

بما أن  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$  فإن  $f$  في 0 على اليمين



✓  $f_1: x \mapsto \text{Arc tan } x$  متصلة على  $\mathbb{R}$  و بالخصوص متصلة على  $0, +\infty$

$f_2: x \mapsto x$  متصلة على  $\mathbb{R}$  و بالخصوص متصلة على  $0, +\infty$

$$\forall x \in 0, +\infty \quad f_2(x) \neq 0 \text{ و}$$

$$\text{إذن } f = \frac{f_1}{f_2} \text{ متصلة على } 0, +\infty$$

خلاصة:  $f$  متصلة على المجال  $I$

2. أُُُُّّّّ (ليكن  $x \in I = 0, +\infty$  وليكن  $t \in 0, x$

$$\text{لدينا: } 0 \leq t \leq x$$

$$\text{إذن: } 0 \leq t^2 \leq x^2$$

$$\text{إذن: } 1 \leq 1+t^2 \leq 1+x^2$$

$$\text{و منه: } \forall t \in 0, x \quad \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq 1$$

$$\text{(ب) لدينا: } \forall t \in 0, x \quad \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq 1$$

$$\text{إذن: } \int_0^x \frac{1}{1+x^2} dt \leq \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt \leq \int_0^x 1 dt$$

$$\text{إذن: } \left[ \frac{t}{1+x^2} \right]_0^x \leq \text{Arc tan } t \Big|_0^x \leq t \Big|_0^x$$

$$\text{و منه: } \forall x \in 0, +\infty \quad \frac{x}{1+x^2} \leq \text{Arc tan } x \leq x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{Arc tan } x - 1}{x} \quad \text{(ج)}$$

$$\forall x \in 0, +\infty \quad \frac{x}{1+x^2} \leq \text{Arc tan } x \leq x \text{ لدينا}$$

$$\text{إذن: } \forall x \in 0, +\infty \quad \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{\text{Arc tan } x}{x} \leq 1$$

$$\forall x \in 0, +\infty \quad \frac{1}{1+x^2} - 1 \leq \frac{\text{Arc tan } x}{x} - 1 \leq 0 \text{ إذن}$$

$$\forall x \in 0, +\infty \quad \frac{-x}{1+x^2} \leq \frac{\text{Arc tan } x - 1}{x} \leq 0 \text{ إذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x}{1+x^2} = 0 \text{ لدينا}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{Arc tan } x - 1}{x} = 0 \text{ إذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0 \text{ : ومنه}$$

و بالتالي  $f$  قابلة للاشتقاق في الصفر على اليمين ولدينا  $f'_d(0) = 0$

3. أ)  $f$  قابلة للاشتقاق على  $0, +\infty$  (كخارج دالتين قابلتين للاشتقاق على  $0, +\infty$ )  
ليكن  $x \in 0, +\infty$  لدينا

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left( \frac{\text{Arc tan } x}{x} \right)' \\ &= \frac{\text{Arc tan}' x \times x - \text{Arc tan } x \times x'}{x^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{\frac{x}{1+x^2} - \text{Arc tan } x}{x^2}$$

$$\forall x \in 0, +\infty \quad f'(x) = \frac{\frac{x}{1+x^2} - \text{Arc tan } x}{x^2} \quad \text{إذن :}$$

$$\forall x \in 0, +\infty \quad f'(x) = \frac{\frac{x}{1+x^2} - \text{Arc tan } x}{x^2} \quad \text{ب) لدينا :}$$

و لدينا :  $x^2 > 0$

إذن إشارة  $f'(x)$  هي إشارة :  $\frac{x}{1+x^2} - \text{Arc tan } x$

حسب الجزء الأول (2) ب) :  $\frac{x}{1+x^2} - \text{Arc tan } x \leq 0$

إذن :  $f'(x) \leq 0$

ومنه :  $f$  تناقصية .

### الجزء الثاني :

1. أ) ليكن  $t \in 0, +\infty$  و  $x \in 0, +\infty$

$$\frac{t}{1+t^2} \leq \text{Arc tan } t \leq t \quad \text{لدينا}$$

$$\frac{1}{1+t^2} \leq \frac{\text{Arc tan } t}{t} \leq 1 \quad \text{إذن :}$$

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt \leq \int_0^x \frac{\text{Arc tan } t}{t} dt \leq \int_0^x 1 dt \quad \text{إذن :}$$

$$\text{Arc tan } x \leq \int_0^x f(t) dt \leq x \quad \text{إذن :}$$

$$\text{إذن : } \frac{\text{Arc tan } x}{x} \leq \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \leq 1$$

$$\forall x \in 0, +\infty \quad \frac{\text{Arc tan } x}{x} \leq g(x) \leq 1$$

$$\forall x \in 0, +\infty \quad f(x) \leq g(x) \leq 1 \quad \text{(ب) لدينا}$$

$$\forall x \in 0, +\infty \quad f(x-1) \leq g(x-1) \leq 0 \quad \text{إذن}$$

$$\forall x \in 0, +\infty \quad \frac{f(x-1)}{x} \leq \frac{g(x-1)}{x} \leq 0 \quad \text{إذن}$$

$$\forall x \in 0, +\infty \quad \frac{f(x) - f(0)}{x-0} \leq \frac{g(x) - g(0)}{x-0} \leq 0 \quad \text{إذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x-0} = 0 \quad \text{لدينا } f \text{ قابلة للاشتقاق في الصفر على اليمين و لدينا}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x-0} = 0 \quad \text{إذن}$$

و بالتالي  $g$  : قابلة للاشتقاق في الصفر على اليمين و لدينا :  $g'_d(0) = 0$

2. (أ) ليكن  $x \in 0, +\infty$

$t \mapsto f(t)$  متصلة على  $0, x$

و الدالة  $x \mapsto x$  قابلة للاشتقاق على  $0, +\infty$

إذن الدالة  $x \mapsto \int_0^x f(t) dt$  قابلة للاشتقاق على  $0, +\infty$

و لدينا :  $x \mapsto \frac{1}{x}$  قابلة للاشتقاق على  $0, +\infty$

و منه  $g$  قابلة للاشتقاق على  $0, +\infty$  (كجاء دالتين قابلتين للاشتقاق على  $0, +\infty$ )

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left( \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right)' \\ &= \left( \frac{1}{x} \right)' \int_0^x f(t) dt + \frac{1}{x} \left( \int_0^x f(t) dt \right)' \\ &= \frac{-1}{x^2} \int_0^x f(t) dt + \frac{1}{x} f(x) \\ &= \frac{1}{x} \left( \frac{-1}{x} \int_0^x f(t) dt + f(x) \right) \\ &= \frac{1}{x} f(x) - g(x) \end{aligned}$$

و منه :  $\forall x \in 0, +\infty \quad g'(x) = \frac{1}{x} f(x) - g(x)$

3. لدينا :  $x > 0$  و لدينا :  $f(x) - g(x) \leq 0$

إذن :  $\forall x \in 0, +\infty \quad g'(x) \leq 0$

و منه  $g$  تناقصية على  $I$

4. أ) ليكن  $x > 1$  و ليكن  $1 \leq t \leq x$

لدينا :  $0 < \text{Arc tan } t < \frac{\pi}{2}$

إذن :  $0 < \frac{\text{Arc tan } t}{t} < \frac{\pi}{2t}$

إذن :  $0 < \int_1^x \frac{\text{Arc tan } t}{t} dt < \int_1^x \frac{\pi}{2t} dt$

إذن :  $0 < \int_1^x \frac{\text{Arc tan } t}{t} dt < \frac{\pi}{2} \ln t \Big|_1^x$

إذن :  $0 < \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt < \frac{\pi \ln x}{2x}$

بما أن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$  فإن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt = 0$

ب) لدينا :  $g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \frac{1}{x} \int_0^1 f(t) dt + \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt$

ليكن  $t \in 0, 1$

لدينا :  $0 \leq t \leq 1$  و  $f$  تناقصية

إذن :  $f(1) \leq f(t) \leq f(0)$

إذن :  $\frac{\pi}{4} \leq f(t) \leq 1$

إذن :  $\frac{\pi}{4} \leq \int_0^1 f(t) dt \leq 1$

إذن :  $\frac{\pi}{4x} \leq \frac{1}{x} \int_0^1 f(t) dt \leq \frac{1}{x}$

بما أن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{4x} = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

فإن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^1 f(t) dt = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt = 0 \text{ : ولدينا كذلك}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0 \text{ : ومنه}$$

**الجزء الثالث :**

1. لنبين أن المعادلة  $g(x) = x$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  في المجال  $0,1$

نعتبر الدالة  $h: x \mapsto g(x) - x$

✓  $h$  متصلة على  $0,1$

✓  $h$  قابلة للاشتقاق على  $0,1$  ولدينا  $h'(x) = g'(x) - 1 < 0$  (لأن  $g'(x) \leq 0$ )

إذن  $h$  تناقصية قطعاً على  $0,1$

✓ ولدينا : على  $h(0) = g(0) - 0 = 1 > 0$  و  $h(1) = g(1) - 1 = \int_0^1 f(t) dt - 1 < 0$

إذن :  $h(0) \times h(1) < 0$

و منه حسب مبرهنة القيم الوسيطة بالوحدانية :  $\exists! \alpha \in 0,1$   $g(\alpha) = 0$

2. أ) ليكن  $x \in 0, +\infty$

$$\text{لدينا : } 1 - f(x) = 1 - \frac{\text{Arctan } x}{x}$$

حسب الجزء الأول (2) ب) :  $\forall x \in 0, +\infty \quad \frac{x}{1+x^2} \leq \text{Arctan } x \leq x$

$$\text{إذن : } \forall x \in 0, +\infty \quad \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{\text{Arctan } x}{x} \leq 1$$

$$\text{إذن : } \forall x \in 0, +\infty \quad -1 \leq -\frac{\text{Arctan } x}{x} \leq -\frac{1}{1+x^2}$$

$$\text{إذن : } \forall x \in 0, +\infty \quad 0 \leq 1 - \frac{\text{Arctan } x}{x} \leq 1 - \frac{1}{1+x^2}$$

$$\text{ومنه : } \forall x \in 0, +\infty \quad 0 \leq 1 - f(x) \leq \frac{x^2}{1+x^2}$$

( ملاحظة النتيجة تبقى صحيحة في حالة  $x=0$  )

ب) ليكن  $x \in 0, +\infty$

$$\text{لدينا : } 0 \leq 1 - f(x) \leq \frac{x^2}{1+x^2}$$

$$\text{إذن : } -1 \leq -f(x) \leq \frac{-1}{1+x^2}$$

$$\text{إذن : } \frac{1}{1+x^2} \leq f(x) \leq 1$$

$$\text{إذن : } \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt \leq \int_0^x f(t) dt \leq \int_0^x 1 dt$$

$$\text{إذن : } \text{Arc tan } x \leq \int_0^x f(t) dt \leq x$$

$$\text{إذن : } f(x) \leq \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \leq 1$$

$$\text{إذن : } f(x) \leq g(x) \leq 1$$

$$\text{إذن : } 0 \leq g(x) - f(x) \leq 1 - f(x) \leq \frac{x^2}{1+x^2}$$

$$\text{إذن : } 0 \leq \frac{1}{x} (g(x) - f(x)) \leq \frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{و منه : } \forall x \in 0, +\infty \quad |g'(x)| \leq \frac{1}{2}$$

3. أ) ليكن  $n \in \mathbb{N}$  لدينا :

✓  $g$  متصلة على المجال المغلق الذي طرفاه  $u_n$  و  $\alpha$

✓  $g$  قابلة للاشتقاق على المجال المفتوح الذي طرفاه  $u_n$  و  $\alpha$

$$\forall x \in 0, +\infty \quad |g'(x)| \leq \frac{1}{2} \quad \checkmark$$

إذن حسب متباينة التزايد المتناهية :  $|g(u_n) - g(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$

وبما أن  $u_{n+1} = g(u_n)$  و  $\alpha = g(\alpha)$

فإن :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$

ب) لنتين بالترجع :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$

✓ من أجل  $n=0$  :

$$\text{لدينا : } |u_0 - \alpha| = |u_0 - \alpha| \text{ و } \left(\frac{1}{2}\right)^0 |u_0 - \alpha| = |u_0 - \alpha|$$

$$\text{إذن : } |u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 |u_0 - \alpha|$$

✓ ليكن  $n \in \mathbb{N}$

$$\blacksquare \text{ نفترض أن : } |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

$$\blacksquare \text{ و نبين أن : } |u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha| \text{ ؟}$$

$$\text{لدينا حسب الافتراض : } |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

$$\boxed{a} \text{ إذن : } \left| \frac{1}{2} |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha| \right|$$

$$\boxed{b} \text{ و حسب نتيجة السؤال السابق : } \left| u_{n+1} - \alpha \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha| \right|$$

$$\text{من } \boxed{a} \text{ و } \boxed{b} \text{ نستنتج : } |u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha|$$

$$\checkmark \text{ نستنتج : } \forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

$$\text{بما أن } -1 < \frac{1}{2} < 1 \text{ فإن : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \text{ و منه : } \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \alpha| = 0$$

$$\text{و بالتالي المتتالية } u_n \text{ متقاربة و لدينا : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$$

ك