Yassine Mghazli

التمرين الاول

1- $E \subset M_3(\mathbb{R})$ و $E \neq \varnothing$ (لأن $0_{M_3(\mathbb{R})} = M(0,0) \in E$)

و لدينا

$$\left(\forall \left(M(x,y), M(a,b)\right) \in E^2\right); M(x,y) - M(a,b) = \begin{pmatrix} x+y & 0 & -2y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & x-y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a+b & 0 & -2b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & a-b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (x-a)+(y-b) & 0 & -2(y-b) \\ 0 & 0 & 0 \\ y-b & 0 & (x-a)-(y-b) \end{pmatrix}$$

$$= M(x-a, y-b) \in E$$

إذن

$$\boxed{E \text{ زمرة جزئية للزمرة } \left(M_3(\mathbb{R}), +\right)}$$

2- لدينا

$$\left(\forall \left(M(x,y), M(x',y')\right) \in E^2\right); M(x,y) \times M(x',y') = \begin{pmatrix} x+y & 0 & -2y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & x-y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x'+y' & 0 & -2y' \\ 0 & 0 & 0 \\ y' & 0 & x'-y' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (x+y)(x'+y') - 2yy' & 0 & -2y'(x+y) - 2y(x'-y') \\ 0 & 0 & 0 \\ y(x'+y') + y'(x-y) & 0 & -2yy' + (x-y)(x'-y') \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} xx' + xy' + yx' - yy' & 0 & -2(xy' + yx') \\ 0 & 0 & 0 \\ xy' + yx' & 0 & xx' - yy' - xy' - yx' \end{pmatrix}$$

$$= M(xx' - yy', xy' + yx')$$

إذن

$$\boxed{\left(\forall \left(M(x,y), M(x',y')\right) \in E^2\right); M(x,y) \times M(x',y') = M(xx' - yy', xy' + yx')}$$

Yassine Mghazli

3- أ) $z' = x' + iy'$ و $\left(\forall (z,z') \in (\mathbb{C}^*)^2\right); \exists! \left((x,y),(x',y') \in \left(\mathbb{R}-\{(0,0)\}\right)^2\right) / z = x+iy$

لدينا
$$\varphi(z\times z') = \varphi\left((x+iy)(x'+iy')\right)$$
$$= \varphi\left(xx'-yy'+i(xy'+yx')\right)$$
$$= M\left(xx'-yy', xy'+yx'\right)$$
$$= M(x,y)\times M(x',y')$$
$$= \varphi(z)\times\varphi(z')$$

إذن

$$\boxed{\left(\forall (z,z') \in (\mathbb{C}^*)^2\right)\ \varphi(z\times z') = \varphi(z)\times\varphi(z') \text{ و منه } \varphi \text{ تشاكل من } (\mathbb{C}^*,\times) \text{ نحو } (E,\times)}$$

ب) بما أن $(\mathbb{C}^*,\times)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد 1 و φ تشاكل من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(E,\times)$

فإن $(\varphi(\mathbb{C}^*),\times)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد $\varphi(1)$ و بما أن $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$ و $\varphi(1) = \varphi(1+0i) = M(1,0)$

فإن

$$\boxed{(E^*,\times) \text{ زمرة تبادلية عنصرها المحايد } M(1,0)}$$

4- لدينا $(E^*,\times)$ زمرة تبادلية و E زمرة جزئية للزمرة $(M_3(\mathbb{R}),+)$ إذن $(E,+)$ زمرة تبادلية

ولدينا حسب السؤال 2- E جزء مستقر من $(M_3(\mathbb{R}),\times)$ إذن $\times$ توزيعي على $+$ في E

نستنتج أن

$$\boxed{(E,+,\times) \text{ جسم تبادلي}}$$

5- أ) لدينا $\left(\forall M(x,y) \in E\right); A\times M(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x+y & 0 & -2y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\left(\forall M(x,y) \in E\right); A\times M(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Yassine Mghazli

ب) نفترض أن ل $M(x,y)$ مماثلا في $(M_3(\mathbb{R}),\times)$ هو M^{-1}

$$A\times M(x,y)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow (A\times M(x,y))\times M^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\times M^{-1}$$

$$\Rightarrow A\times(M(x,y)\times M^{-1})=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

و هذا تناقض ومنه

$\boxed{\text{جميع عناصر } E \text{ لا تقبل مقلوبا في } (M_3(\mathbb{R}),\times)}$

التمرين الثاني

الجزء الاول

-1 لدينا $a^3+b^3\equiv 0[173] \Leftrightarrow 173\,|\,a^3+b^3$ إذن $a^3\equiv -b^3[173]$ و منه $(a^3)^{57}\equiv(-b^3)^{57}[173]$

و بالتالي

$\boxed{a^{171}\equiv -b^{171}[173]}$

-2 لدينا 173 أولي و $173\,|\,a$ إذن $(173\,|\,a^3 \Leftrightarrow 173\,|\,a)$ و $(173\,|\,\mathrm{b}^3 \Leftrightarrow 173\,|\,\mathrm{b})$

و بما أن $173\,|\,a^3+b^3$ فإن $(173\,|\,a^3 \Leftrightarrow 173\,|\,\mathrm{b}^3)$

نستنتج أن

$\boxed{173\,|\,a \Leftrightarrow 173\,|\,\mathrm{b}}$

-3 لدينا $(173\,|\,a \Rightarrow 173\,|\,b)$ و $(173\,|\,a)$ ومنه ($173\,|\,\mathrm{b}$ و $173\,|\,a$)

نستنتج أن

$\boxed{173\,|\,a+b}$

-4 أ) لدينا 173 لايقسم a إذن حسب-2 173لايقسم b ومنه حسب مبرهنة فرما الصغرى $a^{172}\equiv 1[173]$ و $b^{172}\equiv 1[173]$

نستنتج أن

$\boxed{a^{172}\equiv b^{172}[173]}$

ب) لدينا $a^{171}\equiv -b^{171}[173]$ و $a^{172}\equiv b^{172}[173]$ إذن $a^{172}\equiv -ba^{171}[173]$ ومنه

$\boxed{a^{171}(a+b)\equiv 0[173]}$

ج) بما أن 173 لايقسم a فإن 173 لايقسم a^{171} و بما أن 173 أولي فإن $173\wedge a^{171}=1$ و بما أن $173\,|\,a^{171}(a+b)$

فإن حسب مبرهنة كوص

$\boxed{173\,|\,a+b}$

Yassine Mghazli

الجزء الثاني

1- لكل x و y و k من $\mathbb{N}^*$ لدينا :

$$\begin{cases} x+y=173k \\ x^3+y^3=173(xy+1) \end{cases} \Rightarrow \left(x^2-xy+y^2\right)173k=173(xy+1)$$

$$\Rightarrow k\left((x-y)^2+xy\right)=(xy+1)$$

$$\Rightarrow k(x-y)^2=1+xy(1-k)$$

$$\Rightarrow k(x-y)^2+(k-1)xy=1$$

إذن

$$\boxed{k(x-y)^2+(k-1)xy=1}$$

2- نفترض أن $k\neq 1$ حسب السؤال السابق لدينا $k(x-y)^2+(k-1)xy=1$

إذن $(*)k(x-y)^2=1-(k-1)xy$

وبما أن x و y و k من $\mathbb{N}^*$ فإن $k\geq 2$ و $xy\geq 1$ و منه $(k-1)xy\geq 1$ ما يستلزم أن $k(x-y)^2\leq 0$

أي أن $x=y$ المعادلة $(*)$ تصبح $(k-1)xy=1$ ما يستلزم أن $k-1=x=y=1$ و هذا تناقض مع كون

$x+y=173k\geq 173$ إذن الافتراض الأول خاطئ وعكسه هو الصحيح: $\boxed{k=1}$

لدينا $$(E)\Rightarrow \begin{cases}(x-y)^2=1 \\ x+y=173\end{cases} \Rightarrow \left(\begin{cases}(x-y)=1 \\ x+y=173\end{cases} \text{ أو } \begin{cases}(x-y)=-1 \\ x+y=173\end{cases}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{cases}2x=174 \\ 2y=172\end{cases} \text{ أو } \begin{cases}2x=172 \\ 2y=174\end{cases}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{cases}x=87 \\ y=86\end{cases} \text{ أو } \begin{cases}x=86 \\ y=87\end{cases}\right)$$

وعكسا لدينا $87^3+86^3=(86+87)\left(87^2-87\times 86+86^2\right)=173\left(87+86^2\right)=173(1+86\times 87)$

مجموعة حلول المعادلة (E) هي إذن

$$\boxed{S=\{(87,86);(86,87)\}}$$

Yassine Mghazli

التمرين الثالث

1- أ) لدينا $\dfrac{z_1-z}{z_2-z}\times\dfrac{z_2}{z_1}=\dfrac{z_1z_2-zz_2}{z_1z_2-zz_1}=\dfrac{\frac{1}{2}\left(z\left(z_1+z_2\right)-2zz_2\right)}{\frac{1}{2}\left(z\left(z_1+z_2\right)-2zz_1\right)}=\dfrac{z\left(z_1-z_2\right)}{z\left(z_2-z_1\right)}=-1$

إذن

$$\boxed{\frac{z_1-z}{z_2-z}\times\frac{z_2}{z_1}=-1}$$

ب) بما أن النقط O و M و M_1 و M_2 غير مستقيمية و $\dfrac{z_1-z}{z_2-z}\times\dfrac{z_2-0}{z_1-0}\in\mathbb{R}$ فإنها نقط متداورة ومنه

$$\boxed{\text{النقطة } M \text{ تنتمي للدائرة المحيطة بالمثلث } OM_1M_2}$$

2- لدينا $\overline{z}=\dfrac{\overline{2z_1z_2}}{\overline{z_1+z_2}}=\dfrac{2\overline{z_1}\,\overline{z_2}}{\overline{z_1}+\overline{z_2}}=\dfrac{2z_2z_1}{z_2+z_1}=z$ لأن $z_1=\overline{z_2}$ و $(z_2=\overline{z_1}$

إذن $\overline{z}=z$ ومنه $z\in\mathbb{R}$ نستنتج أن

$$\boxed{M \text{ تنتمي للمحور الحقيقي}}$$

3- أ) الصيغة العقدية الدوران الذي مركزه O و زاويته α هي: $z'=e^{i\alpha}z$ وبما أن صورة M_1 بهذا الدوران هي M_2 فإن

$$\boxed{z_2=e^{i\alpha}z_1}$$

ب) بما أن z_1 و z_2 مترافقين فإن M_1 و M_2 متماثلين بالنسبة للمحور الحقيقي و منه منتصف القطعة $[M_1M_2]$ ينتمي للمحور الحقيقي

و بما أن $OM_1=OM_2$ فإن واسط القطعة $[M_1M_2]$ هو المحور الحقيقي نستنتج حسب السؤال 2- أن

$$\boxed{M \text{ تنتمي لواسط القطعة } [M_1M_2]}$$

4- أ) z_1 و z_2 حلي المعادلة $6t^2-\left(e^{i\theta}+1\right)t+\left(e^{i\theta}-1\right)=0$ إذن $z_1+z_2=\dfrac{e^{i\theta}+1}{6}$ و $z_1z_2=\dfrac{e^{i\theta}-1}{6}$

إذن $z=\dfrac{2z_1z_2}{z_1+z_2}=2\dfrac{\frac{e^{i\theta}-1}{6}}{\frac{e^{i\theta}+1}{6}}=2\dfrac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$ و منه: $\boxed{z=2\dfrac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}}$

Yassine Mghazli

ب) لدينا $z=2\frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}=2\frac{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)}=2\frac{2i\sin\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{\theta}{2}}=2i\tan\frac{\theta}{2}$

وبما أن $\theta\in]0,\pi[$ فإن $\frac{\theta}{2}\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ و منه $\tan\frac{\theta}{2}>0$ نستنتج أن الشكل المثلثي ل z هو

$$\boxed{z=\left[2\tan\frac{\theta}{2},\frac{\pi}{2}\right]}$$

التمرين الرابع

الجزء الأول

1- لكل x من $]0,+\infty[$ الدالة $\varphi:t\to e^{-t}$ متصلة على $[0,x]$ و قابلة للاشتقاق على $]0,x[$ إذن حسب مبرهنة التزايدات المنتهية

يوجد θ من $]0,x[$ بحيث $\varphi'(\theta)=\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}$ و بالتعويض نحصل على $\frac{e^{-x}-1}{x}=-e^{-\theta}$ ومنه $e^{\theta}=\frac{x}{1-e^{-x}}$

$$\boxed{(\forall x\in]0+\infty+\infty[);(\exists\theta\in]0,x[)/e^{\theta}=\frac{x}{1-e^{-x}}}$$

2- أ) و ب) لدينا $(\forall x>0);0<\theta<x\Rightarrow 1<e^{\theta}<e^{x}\Rightarrow 1<\frac{x}{1-e^{-x}}<e^{x}$

$$\overset{(1-e^{-x}>0)}{\Rightarrow} 1-e^{-x}<x<e^{x}\left(1-e^{-x}\right)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}1-e^{-x}<x\\ x<e^{x}-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1-x<e^{-x}\\ x+1<e^{x}\end{cases}$$

إذن

$$\boxed{(\forall x>0);x+1<e^{x}\ \text{و}\ (\forall x>0);1-x<e^{-x}}$$

ج) لدينا $(\forall x>0);0<\theta<x\Rightarrow 1<e^{\theta}<e^{x}\Rightarrow 1<\frac{x}{1-e^{-x}}<e^{x}$

$$\Rightarrow 1<\frac{xe^{x}}{e^{x}-1}<e^{x}\Rightarrow 0<\ln\left(\frac{xe^{x}}{e^{x}-1}\right)<x$$

(لأن الدالة $\ln$ تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$) و منه

$$\boxed{(\forall x>0);0<\ln\left(\frac{xe^{x}}{e^{x}-1}\right)<x}$$

Yassine Mghazli

الجزء الثاني

1- أ) لدينا $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{xe^x}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to 0} e^x\frac{1}{\frac{e^x-1}{x}}=1\times\frac{1}{1}=1=f(1)$

إذن f متصلة على اليمين في 0

ب) لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{xe^x}{e^x-1}-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{e^x}{x}-\frac{1}{x}}=0$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}-\frac{1}{x}=+\infty$

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=0$ ومنه ل (C) مقارب مائل بجوار $+\infty$ معادلته $y=x$

2- أ) لدينا حسب 2-أ)من الجزء الأول: $(\forall t>0);1-t<e^{-t}$ إذن $(\forall t\geq 0);1-t\leq e^{-t}$

إذن $(\forall x\geq 0);\int_0^x(1-t)\,dt\leq\int_0^x e^{-t}dt$

يستلزم $(\forall x\geq 0);\left[t-\frac{t^2}{2}\right]_0^x\leq\left[-e^{-t}\right]_0^x$

ومنه

$$\boxed{(\forall x\geq 0);x-\frac{x^2}{2}\leq -e^{-x}+1}$$

ب) لدينا

$$(\forall x\geq 0);x-\frac{x^2}{2}\leq -e^{-x}+1\Rightarrow(\forall x\geq 0);\begin{cases}e^{-x}+x-1\leq\frac{x^2}{2}\\ \int_0^x t-\frac{t^2}{2}dt\leq\int_0^x\left(-e^{-t}+1\right)dt\end{cases}$$

$$\Rightarrow(\forall x>0);\begin{cases}e^{-x}+x-1\leq\frac{x^2}{2}\\ \left[\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{6}\right]_0^x\leq\left[e^{-t}+t\right]_0^x\end{cases}$$

$$\Rightarrow(\forall x>0);\begin{cases}e^{-x}+x-1\leq\frac{x^2}{2}\\ \frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\leq e^{-x}+x-1\end{cases}$$

Yassine Mghazli

ومنه

$$\boxed{(\forall x>0);\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\le e^{-x}+x-1\le\frac{x^2}{2}}$$

-3 أ) لدينا

$$(\forall x>0);\frac{f(x)-1}{x}=\frac{\frac{xe^x}{e^x-1}-1}{x}$$

$$=\frac{xe^x-e^x-1}{x\left(e^x-1\right)}$$

$$=\frac{x}{x^2\left(e^x-1\right)}\times e^x\left(x-1-e^{-x}\right)$$

$$=\frac{f(x)}{x^2}\left(x-1-e^{-x}\right)$$

إذن

$$\boxed{(\forall x>0);\frac{f(x)-1}{x}=\frac{x-1-e^{-x}}{x^2}f(x)}$$

ب) لدينا

$$(\forall x>0);\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\le e^{-x}+x-1\le\frac{x^2}{2}\Rightarrow(\forall x>0);\frac{1}{2}-\frac{x}{6}\le\frac{e^{-x}+x-1}{x^2}\le\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow(\forall x>0);\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{6}\right)f(x)\le\frac{e^{-x}+x-1}{x^2}f(x)\le\frac{1}{2}f(x)$$

$$\Rightarrow(\forall x>0);\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{6}\right)f(x)\le\frac{f(x)-1}{x}\le\frac{1}{2}f(x)$$

وبما أن $\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{6}\right)f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{2}f(x)=\frac{1}{2}f(0)=\frac{1}{2}$

فإن

$$\boxed{\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-1}{x}=\frac{1}{2}\ \text{ومنه}\ f\ \text{قابلة للاشتقاق على اليمين في}\ 0\ \text{و}\ f_d'(0)=\frac{1}{2}}$$

-4 أ) الدوال $x\to x$ و $x\to e^x$ و $x\to1$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و بالخصوص على $]0,+\infty[$ إذن الدالتين $x\to xe^x$ و $x\to e^x-1$ قابلتين للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و بما أن $(\forall x>0);e^x-1\ne0$

فإن الدالة $x\to\frac{xe^x}{e^x-1}$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

Yassine Mghazli

خلاصة

$$\boxed{\text{الدالة } f \text{ قابلة للاشتقاق على }]0,+\infty[}$$

لدينا

$$\begin{aligned}(\forall x>0);\ f'(x)&=\frac{(e^x+xe^x)(e^x-1)-xe^xe^x}{(e^x-1)^2}\\&=\frac{e^x}{(e^x-1)^2}\left((x+1)(e^x-1)-xe^x\right)\\&=\frac{e^x}{(e^x-1)^2}\left(xe^x-x+e^x-1-xe^x\right)\\&=\frac{e^x}{(e^x-1)^2}\left(e^x-x-1\right)\end{aligned}$$

إذن

$$\boxed{(\forall x>0);\ f'(x)=\frac{e^x}{(e^x-1)^2}\left(e^x-x-1\right)}$$

ب) حسب السؤال 2- ب) من الجزء الأول لدينا $(\forall x>0); x+1<e^x$

إذن $(\forall x>0); e^x-x-1>0$ و منه $(\forall x>0);\ f'(x)>0$

$$\boxed{\text{نستنتج أن الدالة } f \text{ تزايدية قطعا على }]0,+\infty[}$$

الجزء الثالث

1- برهان بالترجع على العلاقة $"(\forall n\in\mathbb{N}); u_n>0"$

لدينا $u_0>0$ إذن العلاقة صحيحة من اجل $n=0$

ليكن n من $\mathbb{N}$ نفترض أن $u_n>0$ و نبين ان $u_{n+1}>0$

$n\in\mathbb{N}; u_n>0 \Rightarrow f(u_n)>f(0) \Rightarrow \ln(f(u_n))>\ln(f(0))$ (لأن f و $\ln$ تزايديتين قطعا على $]0,+\infty[$
)

و بما أن $\ln(f(0))=\ln(1)=0$ فإن $u_{n+1}>0$

حسب مبدأ الترجع نستنتج أن

$$\boxed{(\forall n\in\mathbb{N}); u_n>0}$$

Yassine Mghazli

2- لدينا حسب السؤال 2- ج) $(\forall x>0);0<\ln\left(\frac{xe^x}{e^x-1}\right)<x$

وبما أن $(\forall n\in\mathbb{N});u_n>0$ فإن $(\forall n\in\mathbb{N});0<\ln\left(\frac{u_ne^{u_n}}{e^{u_n}-1}\right)<u_n$

نستنتج أن $(\forall n\in\mathbb{N});0<\ln\left(f\left(u_n\right)\right)<u_n$ وبالتالي $(\forall n\in\mathbb{N});0<u_{n+1}<u_n$

إذن

$\boxed{\text{المتتالية } (u_n) \text{ تناقصية قطعا و بما أنها مصغورة ب } 0 \text{ فهي إذن متقاربة}}$

3- لدينا $(\forall x>0);e^x>x+1\Leftrightarrow e^x-1>x\Leftrightarrow\frac{x}{e^x-1}<1\Leftrightarrow\frac{xe^x}{e^x-1}<e^x\Leftrightarrow f(x)<e^x\Leftrightarrow\ln\left(f(x)\right)<x$

و $\ln\left(f(0)\right)=0$

إذن $\begin{cases}(\forall x>0);\ln\left(f(x)\right)\neq x\\ \ln\left(f(0)\right)=0\end{cases}$ و منه

$\boxed{0 \text{ هو الحل الوحيد للمعادلة } \ln\left(f(x)\right)=x}$

المتتالية (u_n) متقاربة و الدالة $\ln\circ f$ متصلة على $]0,+\infty[$ وتحقق $\ln\circ f\left(]0,+\infty[\right)\subset]0,+\infty[$

إذن نهايتها l تحقق المعادلة $\ln\left(f(l)\right)=l$ التي تقبل حلا وحيدا هو 0 نستنتج أن

$\boxed{\lim u_n=0}$

التمرين الخامس

1- أ) لدينا $(\forall t\in]0,+\infty[);\frac{1}{\sqrt{e^t-1}}>0$

إذن $(\forall x\in]0,\ln 2[);\int_{\ln 2}^{x}\frac{1}{\sqrt{e^t-1}}dt<0$ و $(\forall x\in]\ln 2,+\infty[);\int_{\ln 2}^{x}\frac{1}{\sqrt{e^t-1}}dt>0$

و منه إشارة $F(x)$ كما يلي

$\boxed{F(x) \text{ موجبة قطعا على المجال }]\ln 2,+\infty[}$

$\boxed{F(x) \text{ سالبة قطعا على المجال }]0,\ln 2[\text{ و } F(\ln 2)=0}$

Yassine Mghazli

ب) الدالة F هي أصلية الدالة $x \to \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}}$ على $]0,+\infty[$ و التي تنعدم عند $\ln 2$

إذن F قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و لدينا

$$\boxed{\left(\forall x \in]0,+\infty[\right); F'(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}}}$$

ج) لدينا $\left(\forall x \in]0,+\infty[\right); F'(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}} > 0$ إذن

$$\boxed{\text{الدالة } F \text{ تزايدية قطعا على }]0,+\infty[}$$

2- أ) بوضع $u = \sqrt{e^t - 1}$ يكون لدينا

$$\begin{cases} du = \frac{e^t}{2u} dt = \frac{u^2 + 1}{2u} dt \Leftrightarrow dt = \frac{2u}{u^2 + 1} du \\ t = x \Leftrightarrow u = \sqrt{e^x 91} \\ t = \ln 2 \Leftrightarrow u = 1 \end{cases}$$

ومنه

$$\int_{\ln 2}^{x} \frac{1}{\sqrt{e^t - 1}} dt = \int_{1}^{\sqrt{e^x - 1}} \frac{1}{u} \frac{2u}{u^2 + 1} du = \int_{1}^{\sqrt{e^x - 1}} \frac{2}{u^2 + 1} du$$

$$= 2\left[arc\tan\right]_1^{\sqrt{e^x - 1}} = 2\left(arc\tan\left(\sqrt{e^x - 1}\right) - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 2arc\tan\left(\sqrt{e^x - 1}\right) - \frac{\pi}{2}$$

إذن

$$\boxed{\int_{\ln 2}^{x} \frac{1}{\sqrt{e^t - 1}} dt = 2arc\tan\left(\sqrt{e^x - 1}\right) - \frac{\pi}{2}}$$

ب) لدينا $\lim_{x \to 0^+} F(x) = \lim_{x \to 0^+} 2arc\tan\left(\sqrt{e^x - 1}\right) - \frac{\pi}{2} = 2\arctan(0) - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$

و $\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} 2arc\tan\left(\sqrt{e^x - 1}\right) - \frac{\pi}{2} = 2\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

Yassine Mghazli

ومنه

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x)=\frac{\pi}{2} \text{ و } \lim_{x\to 0^+} F(x)=-\frac{\pi}{2}}$$

3- أ) F قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ إذن متصلة عليه و بما أنها تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$

فهي إذن تقابل من $]0,+\infty[$ نحو $F(]0,+\infty[)$

و لدينا $F(]0,+\infty[)=\left]\lim_{x\to 0^+}F(x),\lim_{x\to+\infty}F(x)\right[=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

إذن

$$\boxed{F \text{ تقابل من }]0,+\infty[\text{ نحو } \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[}$$

ب) $(\forall y\in]0,+\infty[);\left(\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right)\ F(y)=x \Leftrightarrow 2\arctan\left(\sqrt{e^y-1}\right)-\frac{\pi}{2}=x$

$$\Leftrightarrow \arctan\left(\sqrt{e^y-1}\right)=\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{e^y-1}=\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow e^y=1+\tan^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow y=\ln\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

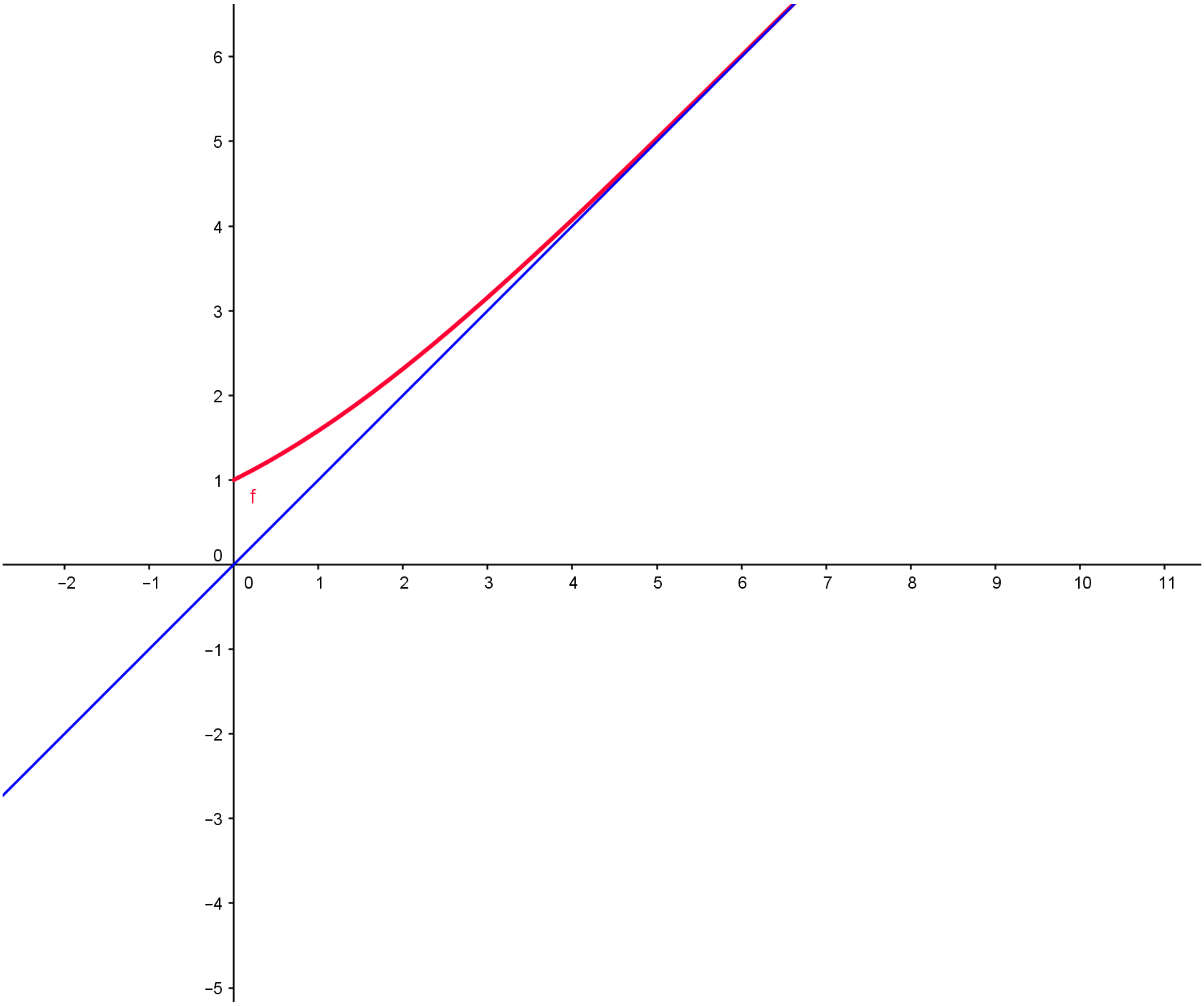
ومنه

$$\boxed{F \text{ تقابل من }]0,+\infty[\text{ نحو } \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\text{ و } \forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[;F^{-1}(x)=\ln\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)}$$

Yassine Mghazli

إضافة

مبيان الدالة f



Yassine Mghazli

مبيان الدالة F