المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني
ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⵓⵙⵎⵓⵜⵜⴳ ⴰⵥⵔⴼⴰⵏ
المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة الاستدراكية 2015
- الموضوع -

RS 24

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	4
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	المعامل	9

- مدة إنجاز الموضوع هي أ ربع ساعات.
- يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها .
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالبنيات الجبرية.................................(4 ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالحسابيات و حساب الاحتمالات.............(3 ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالأعداد العقدية.................................(3 ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالتحليل...(6 ن)
- التمرين الخامس يتعلق بالتحليل ....(4 ن)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيفما كان نوعها

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

التمرين الأول: (4 نقط)

الجزء الأول: نزود $\mathbb{R}$ ، بقانون التركيب الداخلي $*$ المعرف بما يلي:

$$(\forall (x,y)\in \mathbb{R}^2) \qquad x*y = x+y-e^{xy}+1$$

0.25 1-أ) بين أن القانون $*$ تبادلي في $\mathbb{R}$ ،

0.5 ب) بين أن القانون $*$ يقبل عنصرا محايدا يتم تحديده.

0.5 2- علما أن المعادلة: $(E)\ :\ 3+x-e^{2x}=0$ تقبل في $\mathbb{R}$ ، حلين مختلفين a و b ،
بين أن القانون $*$ غير تجميعي.

الجزء الثاني: نذكر أن $\left(M_2(\mathbb{R}),+,\times\right)$ حلقة غير تبادلية و واحدية وحدتها $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

و أن $\left(M_2(\mathbb{R}),+,.\right)$ فضاء متجهي حقيقي و أن $\left(\mathbb{C}^*,\times\right)$ زمرة تبادلية.

لكل x و y من $\mathbb{R}$ ، نضع: $M(x,y)=\begin{pmatrix}x & -2y\\ \frac{y}{2} & x\end{pmatrix}$ و ليكن $F=\left\{M(x,y)/(x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}$

0.5 1- بين أن F فضاء متجهي جزئي للفضاء المتجهي الحقيقي $\left(M_2(\mathbb{R}),+,.\right)$

0.5 2- بين أن F جزء مستقر من $\left(M_2(\mathbb{R}),\times\right)$

3- نعتبر التطبيق φ من $\mathbb{C}^*$ نحو F الذي يربط كل عدد عقدي $x+iy$ (حيث x و y عددان حقيقيان)
بالمصفوفة $M(x,y)$

0.5 أ) بين أن φ تشاكل من $\left(\mathbb{C}^*,\times\right)$ نحو $\left(F,\times\right)$

0.25 ب) نضع: $F^*=F-\left\{M(0,0)\right\}$. بين أن: $\varphi\left(\mathbb{C}^*\right)=F^*$

0.25 ج) بين أن $\left(F^*,\times\right)$ زمرة تبادلية.

0.75 4- بين أن $\left(F,+,\times\right)$ جسم تبادلي.

التمرين الثاني: (3 نقط)

0.5 I -1- ليكن a من $\mathbb{Z}$. بين أنه إذا كان a و 13 أوليان فيما بينهما فإن: $a^{2016}\equiv 1\ [13]$

2- نعتبر في $\mathbb{Z}$ المعادلة: $(E):\ x^{2015}\equiv 2\ [13]$ وليكن x حلا للمعادلة (E)

0.5 أ) بين أن x و 13 أوليان فيما بينهما.

0.5 ب) بين أن: $x\equiv 7\ [13]$

0.5 3- بين أن مجموعة حلول المعادلة (E) هي: $S=\left\{7+13k\ /\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

II- نعتبر صندوقا U يحتوي على خمسين (50) كرة مرقمة من 1 إلى 50 . (الكرات لا يمكن التمييز بينها باللمس)

0.5 1- نسحب عشوائيا كرة من الصندوق. ما هو احتمال الحصول على كرة تحمل رقما يكون حلا للمعادلة (E) ؟

0.5 2- نسحب عشوائيا كرة من الصندوق ،نسجل رقمها ثم نعيدها إلى الصندوق.نكرر هذه التجربة ثلاث مرات.

ما هو احتمال الحصول مرتين بالضبط على كرة تحمل رقما يكون حلا للمعادلة (E) ؟

التمرين الثالث: (3 نقط)

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية: $(E):\ z^2-(1+i)z+2+2i=0$

1- أ) تحقق أن $(1-3i)^2$ هو مميز المعادلة (E) 0.25

ب) حدد z_1 و z_2 حلي المعادلة (E) في المجموعة $\mathbb{C}$ (نأخذ z_1 تخيلي صرف) 0.5

ج) بين أن: $\dfrac{z_1}{z_2}=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ 0.5

2- المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد و ممنظم و مباشر .

نعتبر النقطة A التي لحقها z_1 و B النقطة التي لحقها z_2

أ) حدد العدد العقدي e لحق النقطة E منتصف القطعة $[AB]$ 0.25

ب) ليكن r الدوران الذي مركزه A وقياس زاويته $\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$ 0.5

وليكن c لحق النقطة C صورة النقطة E بالدوران r. بين أن: $c=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}i$

ج) نعتبر D النقطة ذات اللحق $d=1+\dfrac{3}{2}i$. 1

بين أن العدد $\left(\dfrac{c-z_1}{z_2-z_1}\right)\left(\dfrac{z_2-d}{c-d}\right)$ حقيقي ثم أول هندسيا النتيجة المحصل عليها.

التمرين الرابع: (6 نقط)

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم.

نعتبر الدالة العددية f_n للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f_n(x)=\dfrac{1}{1+e^{-\frac{3}{2}(x-n)}}$

و ليكن (C_n) المنحنى الممثل للدالة f_n في معلم متعامد و ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1- أ) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$ ثم أول مبيانيا النتيجتين المحصل عليهما. 0.75

ب) بين أن الدالة f_n قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ثم أحسب $f_n'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$ 0.75

ج) بين أن الدالة f_n تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$ 0.25

2- أ) بين أن النقطة $I_n\left(n,\dfrac{1}{2}\right)$ مركز تماثل للمنحنى (C_n) 0.5

ب) أنشئ المنحنى (C_1) . 0.5

ج) أحسب مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنى (C_1) و المستقيمات: $x=0$ و $x=1$ و $y=0$ 0.75

3- أ) لكل n من $\mathbb{N}^*$، بين أن المعادلة : $f_n(x)=x$ تقبل حلا وحيدا u_n في المجال $]0,n[$ 0.75

ب) بين أن: $f_{n+1}(x)<f_n(x) \quad (\forall x\in\mathbb{R})\ (\forall n\in\mathbb{N}^*)$ 0.5

ج) بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ تناقصية قطعا ثم استنتج أنها متقاربة. 0.75

د) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ 0.5

التمرين الخامس: (4 نقط)

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}^*$ ، بما يلي: $g(x)=\int_x^{3x}\frac{\cos t}{t}dt$

1- بين أن الدالة g زوجية. 0.5

2- بين أن الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ ثم أحسب $g'(x)$ من أجل $x>0$ 0.75

3- أ) باستعمال مكاملة بالأجزاء، تحقق أن: $\int_x^{3x}\frac{\cos t}{t}dt=\frac{\sin 3x-3\sin x}{3x}+\int_x^{3x}\frac{\sin t}{t^2}dt \quad (\forall x>0)$ 0.5

ب) بين أنه لكل x من المجال $]0,+\infty[$ لدينا: $|g(x)|\leq\frac{2}{x}$ ثم استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ 0.75

4- أ) بين أن : $0\leq\int_x^{3x}\frac{1-\cos t}{t}dt\leq 2x \quad (\forall x>0)$ (لاحظ أن: $1-\cos t\leq t \quad ((\forall t>0)$) 0.5

ب) تحقق أن: $g(x)-\ln 3=\int_x^{3x}\frac{\cos t-1}{t}dt \quad (\forall x>0)$ 0.5

ج) استنتج: $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ 0.5

انتهى