

التمرين الأول

$$U(2N, 2B); V(2N, 2B); W(1N, 2B)$$

(1) الاحتمال لكي يتم السحب من الصندوق  $U$

لكي يتم السحب من الصندوق  $U$  يجب أن نسحب كرة بيضاء من الصندوق  $W$  و هذا الاحتمال هو:  $\frac{2}{3}$

$$\frac{2}{3}$$

(2) احتمال الحصول على كرتين بيضاوين في نهاية التجربة:

يتحقق الحدث إذا و فقط إذا سحبنا كرة بيضاء من  $W(1N, 2B)$  و كرتين بيضاوين من  $U(2N, 3B)$

أو سحبنا كرة سوداء من  $W(1N, 2B)$  و كرتين بيضاوين من  $V(3N, 2B)$

$$\text{إذن احتمال هذا الحدث هو: } \frac{2}{3} \times \frac{C_3^2}{C_5^2} + \frac{1}{3} \times \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{2 \times 3 + 1}{3 \times 10} = \frac{7}{30}$$

$$\frac{7}{30}$$

(3) قانون احتمال المتغير العشوائي  $X$

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$$

$$p((X=1)) = \frac{2}{3} \times \frac{C_2^1 \times C_3^1}{C_5^2} + \frac{1}{3} \times \frac{C_3^1 \times C_2^1}{C_5^2} = \frac{18}{30} \quad \text{و} \quad p((X=0)) = \frac{2}{3} \times \frac{C_2^2}{C_5^2} + \frac{1}{3} \times \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{5}{30}$$

$$p((X=2)) = \frac{7}{30} \quad (\text{2 لدينا حسب السؤال})$$

ومنه قانون احتمال المتغير العشوائي  $X$  مقدم في الجدول التالي:

$k$	0	1	2
$p((X=k))$	$\frac{5}{30}$	$\frac{18}{30}$	$\frac{7}{30}$

التمرين الثاني

$$(\forall n \in \mathbb{N}); c_n = 2 \cdot 10^n - 1 \quad \text{و} \quad b_n = 2 \cdot 10^n + 1$$

(1) لدينا  $b_n \wedge c_n = c_n \wedge (b_n - c_n) = c_n \wedge 2$  و بما أن  $c_n$  عدد فردي فإن  $c_n \wedge 2 = 1$  إذن  $b_n \wedge c_n = 1$

نستنتج أن  $c_n$  و  $b_n$  أوليان في ما بينهما

$$b_n \wedge c_n = c_n \wedge 2$$

(2) بما أن  $b_n \wedge c_n = 1$  فإن حسب مبرهنة بوزو يوجد  $(x_n, y_n)$  من  $\mathbb{N}^2$  بحيث  $b_n x_n + c_n y_n = 1$

نحدد  $x_n$  و  $y_n$  باستعمال خوارزمية أقليدس:

$$\begin{cases} b_n = c_n + 2 \\ c_n = 2(10^n - 1) + 1 \end{cases} \Rightarrow 1 = c_n - 2(10^n - 1) \Rightarrow 1 = c_n - (b_n - c_n)(10^n - 1) \Rightarrow 1 = c_n 10^n + (1 - 10^n) b_n$$

نستنتج أن

$$y_n = 10^n \quad \text{و} \quad x_n = 1 - 10^n$$

## Ammarimaths

## التمرين الثالث

$$\forall (a, b) \in ]-1, 1[; a * b = \frac{a+b}{1+ab} \quad I$$

$$(1) \text{ لدينا: } \begin{cases} -1 < a < 1 \\ -1 < b < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a| < 1 \\ |b| < 1 \end{cases} \Rightarrow |ab| < 1 \Rightarrow -1 < ab < 1 \Rightarrow 0 < 1+ab < 2$$

إذن

$$\forall (a, b) \in ]-1, 1[; 1+ab > 0$$

$$a * b - 1 = \frac{a+b}{1+ab} - 1 = \frac{a+b-1-ab}{1+ab} = \frac{(a-1)(1-b)}{1+ab} < 0 \text{ لدينا}$$

$$a * b + 1 = \frac{a+b}{1+ab} + 1 = \frac{a+b+1+ab}{1+ab} = \frac{(a+1)(1+b)}{1+ab} > 0 \text{ و}$$

نستنتج أن  $-1 < a * b < 1$  و منه  $a * b \in J$  و بالتالي:

\* قانون داخلي في J

(2) أ) لنبين أن القانون \* تبادلي و تجميعي

$$\text{لدينا } (\forall (x, y) \in J^2); x * y = \frac{x+y}{1+xy} = \frac{y+x}{1+yx} = y * x \text{ تبادلي}$$

$$\text{و لدينا } (\forall (x, y, z) \in J^3); (x * y) * z = \frac{\frac{x+y}{1+xy} + z}{1 + \frac{x+y}{1+xy} z} = \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz}$$

$$\text{و } x * (y * z) = x * \frac{y+z}{1+yz} = \frac{x + \frac{y+z}{1+yz}}{1 + x \frac{y+z}{1+yz}} = \frac{x+xyz+y+z}{1+yz+xy+xz}$$

إذن  $(\forall (x, y, z) \in J^3); (x * y) * z = x * (y * z)$  و منه القانون \* تجميعي

القانون \* تبادلي و تجميعي

ب) تحديد العنصر المحايد

لنحدد  $e$  من  $J$  بحيث  $(\forall x \in J); x * e = x$ 

$$(\forall x \in J); x * e = x \Leftrightarrow \frac{x+e}{1+xe} = x \stackrel{(1+xe>0)}{\Leftrightarrow} x+e = x+x^2e \Leftrightarrow (1-x^2)e = 0$$

و بما أن  $x \in ]-1, 1[$  فإن  $1-x^2 \neq 0$  و منه  $e = 0$  و  $0 \in J$ القانون \* تبادلي إذن  $(\forall x \in J); x * 0 = 0 * x = x$  وهذا يعني أن

0 هو العنصر المحايد للقانون \*

ج) لنبين أن  $(J, *)$  زمرة تبادليةليكن  $x$  من  $J$  و  $x'$  مماثله (إذا وجد) بالنسبة للقانون \*

$$\text{لدينا } x * x' = 0 \Leftrightarrow \frac{x+x'}{1+xx'} = 0 \Leftrightarrow x' = -x$$

و بما أن  $x \in ]-1, 1[$  فإن  $-x \in ]-1, 1[$  و القانون \* تبادلي إذن  $(\forall x \in J); x * (-x) = (-x) * x = 0$

## Ammarimaths

ومنه لكل  $x$  من  $J$  مماثل بالنسبة للقانون  $*$  هو  $-x$   
خلاصة: القانون  $*$  تبادلي و تجميعي و يقبل عنصرا محايدا و لكل عنصر من  $J$  مماثل في  $J$  إذن

**( $J, *$ ) زمرة تبادلية**

II  $f$  تطبيق معرف على  $\mathbb{R}$  ب  $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

(1) لنبين أن  $f$  تقابل من  $\mathbb{R}$  نحو  $J$

ليكن  $y$  من  $J$  ونحل المعادلة:  $f(x) = y$  ( $x \in \mathbb{R}$ )

$$(x \in \mathbb{R}); f(x) = y \Leftrightarrow \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = y \Leftrightarrow ye^x + y = e^x - 1 \Leftrightarrow e^x = \frac{y+1}{1-y}$$

و بما أن  $y \in J$  فإن  $\frac{y+1}{1-y} > 0$  ومنه لكل  $y$  من  $J$  سابق و حيد في  $\mathbb{R}$  هو  $\ln \frac{y+1}{1-y}$  نستنتج أن

**$f$  تقابل من  $\mathbb{R}$  نحو  $J$**

ملاحظة: يمكن أن نبين تقابل  $f$  باستعمال اتصال و رتبة  $f$ .

(2)  $\perp$  قانون معرف على  $J$  ب:  $(\forall (x, y) \in J^2); x \perp y = f(g(x) \times g(y))$

لنبين  $f$  أن تشاكل من  $(\mathbb{R}^*, \times)$  نحو  $(J^*, \perp)$  بحيث  $J^* = J \setminus \{0\}$

لدينا  $(\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2); f(x) \perp f(y) = f(g(f(x)) \times g(f(y)))$

و بما أن  $g$  هو التقابل العكسي ل  $f$  فإن  $g(f(x)) = x, g(f(y)) = y$

نستنتج أن  $(\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2); f(x) \perp f(y) = f(x \times y)$  و هذا يعني أن

**أن  $f$  تشاكل من  $(\mathbb{R}^*, \times)$  نحو  $(J^*, \perp)$**

(3) لنبين أن  $(J, *, \perp)$  جسم تبادلي

لدينا  $f$  تشاكل من  $(\mathbb{R}^*, \times)$  نحو  $(J^*, \perp)$  و  $(\mathbb{R}^*, \times)$  زمرة تبادلية إذن  $(J^*, \perp)$  زمرة تبادلية

و لدينا  $(J, *)$  زمرة تبادلية و  $\perp$  توزيعي على  $*$  نستنتج أن

**$(J, *, \perp)$  جسم تبادلي**

### التمرين الرابع

I (1) لنحل في  $\mathbb{C}$  المعادلة  $z^2 + i = 0$

لدينا  $z + i = 0 \Leftrightarrow z^2 = \frac{1}{2}(1-i)^2 \Leftrightarrow (z = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ أو } z = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}})$

بما أن  $a$  هو حل المعادلة بحيث  $\text{Re}(a) > 0$  فإن  $a = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$  ومنه مجموعة حلول المعادلة هي:

$$S = \{-a, a\}$$

(2) معيار و عمدة العدد العقدي  $1+a$  لدينا

$$1+a = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}} = 1 + \cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{8} - 2i \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} = 2 \cos \frac{\pi}{8} \left( \cos \left( -\frac{\pi}{8} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{8} \right) \right)$$

نستنتج أن

$$|1+a| = 2 \cos \frac{\pi}{8} \text{ و } \arg(1+a) \equiv -\frac{\pi}{8} [2\pi]$$

## Ammarimaths

$$\text{ب) استنتاج } \cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\text{حسب السؤال السابق لدينا } \cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} |1+a| = \frac{1}{2} \sqrt{\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{1+\sqrt{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2+\sqrt{2}}$$

ومنه

$$\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\text{ج) لنبين أن } (1+a)(1-a) = 1+i$$

$$\text{لدينا } (1+a)(1-a) = 1-a^2 = 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)\right)^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}(+2i)\right) = 1+i$$

إذن

$$(1+a)(1-a) = 1+i$$

استنتاج الشكل المثلثي ل  $1-a$ 

$$1-a = \frac{1+i}{1+a} = \frac{\left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]}{\left[2 \cos \frac{\pi}{8}, -\frac{\pi}{8}\right]} = \left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \frac{3\pi}{8}\right] = \left[\sqrt{2-\sqrt{2}}, \frac{3\pi}{8}\right] \text{ لدينا}$$

إذن الشكل المثلثي للعدد  $1-a$ 

$$1-a = \left[\sqrt{2-\sqrt{2}}, \frac{3\pi}{8}\right]$$

II في المستوى المنسوب الى معلم متعامد ممنظم  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  لدينا  $M, B, A$  و  $M'$  والنقط التي أحاطها على التوالي  $a, -a, z$  و  $z'$ .  
بحيث  $zz' + i = 0$  و  $N$  النقطة التي لحقها  $\bar{z}$ .

1) لنبين أن المستقيمين  $(ON)$  و  $(OM')$  متعامدان

$$\text{لدينا } \text{Arg} \left( \frac{\text{aff}(\overline{ON})}{\text{aff}(\overline{OM'})} \right) \equiv \text{Arg} \left( \frac{\bar{z}}{z} \right) (2\pi) \text{ و } \overline{\text{Arg}(\overline{OM'}, \overline{ON})} \equiv \text{Arg} \left( \frac{\text{aff}(\overline{ON})}{\text{aff}(\overline{OM'})} \right) (2\pi)$$

$$\text{و بما أن } \overline{\text{Arg}(\overline{OM'}, \overline{ON})} \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi) \text{ منه } \text{Arg} \left( \frac{\bar{z}}{z} \right) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi) \text{ فإن } \frac{\bar{z}}{z} = \frac{z\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{z\bar{z}}{-i} = iz\bar{z} = \left[ z\bar{z}, \frac{\pi}{2} \right]$$

وهذا يعني أن

المستقيمين  $(ON)$  و  $(OM')$  متعامدان

$$\text{2) (أ) لنبين أن } z' - a = i \frac{z-a}{az}$$

$$\text{لدينا } z' - a = \frac{-i}{z} - a = \frac{-i - az}{z} = \frac{-ia - a^2 z}{az} \stackrel{(a^2 = -i)}{=} \frac{-ia + iz}{az} = i \frac{z-a}{az}$$

و هذا هو المطلوب

$$z' - a = i \frac{z-a}{az}$$

$$\text{ب) لدينا } z' + a = z' - a + 2a = i \frac{z-a}{az} + 2a = \frac{iz - ia + 2a^2 z}{az} = -i \frac{z+a}{az}$$

$$\text{ومنه } z \neq -a \Rightarrow z+a \neq 0 \Rightarrow z' + a \neq 0 \Rightarrow z' \neq -a$$

## Ammarimaths

أي أن :

$$\boxed{\text{إذا كان } z \neq -a \text{ فإن } z' \neq -a}$$

$$\text{ولدينا } z' - a = i \frac{z-a}{az} \text{ و } z' + a = -i \frac{z+a}{az} \text{ إذن } \frac{z' - a}{z' + a} = \frac{i \frac{z-a}{az}}{-i \frac{z+a}{az}} = -\frac{z-a}{z+a}$$

$$\boxed{\frac{z' - a}{z' + a} = -\frac{z-a}{z+a}}$$

(3) بما أن النقط  $M, B, A$  غير مستقيمة فإن النقط  $M, B, A$  و  $M'$  غير مستقيمة

$$\text{إذن } M, B, A \text{ و } M' \text{ متداورة يكافئ } \frac{z-a}{z'+a} \times \frac{z'+a}{z+a} \in \mathbb{R}$$

$$\text{ولدينا } \frac{z-a}{z'+a} = -\frac{z-a}{z+a} \Rightarrow \frac{z-a}{z'+a} \times \frac{z'+a}{z+a} = -1 \text{ إذن } M, B, A \text{ و } M' \text{ متداورة}$$

ومنه

النقطة  $M'$  تنتمي إلى الدائرة المحيطة بالمثلث  $AMB$

التمرين الخامس

$$f \text{ دالة معرفة على } ]0, +\infty[ \text{ ب } f(x) = \frac{-\ln x}{\sqrt{x}}$$

(1) حساب نهايتي  $f$  عند  $0^+$  و عند  $+\infty$ 

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (-\ln x) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty \text{ (لأن) } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\ln x}{\sqrt{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -2 \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0; \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty}$$

التأويل الهندسي

: محور الافاصيل مقارب ل (C) و محور الارايب مقارب ل (C) بجوار  $+\infty$

(2) حساب مشتقة  $f$ 

$$f \text{ قابلة للاشتقاق على } ]0, +\infty[ \text{ ولدينا } (\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) = \frac{-\frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{x \ln x - 2x}{2x^2 \sqrt{x}} = \frac{\ln x - 2}{2x\sqrt{x}}$$

إذن

$$\boxed{(\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) = \frac{\ln x - 2}{2x\sqrt{x}}}$$

إشارة  $f'$  هي إشارة  $\ln x - 2$  أي إشارة  $\ln x - \ln e^2$  و منه

$$\boxed{f \text{ تزايدية قطعاً على المجال } [e^2, +\infty[ \text{ و تناقصية قطعاً على } ]0, e^2]}$$

$$(3) g_n \text{ دالة معرفة على } ]0, 1[ \text{ ب } g_n(x) = f(x) - x^n \text{ مع } n \in \mathbb{N}^*$$

## Ammarimaths

(أ) لنبين أن تناقصية قطعاً على  $]0,1[$ 

$g_n$  قابلة للاشتقاق على  $]0,1[$  ولدينا  $(\forall x \in ]0,1[); g'_n(x) = f'(x) - nx^{n-1}$   
بما أن  $(\forall x \in ]0,1[); f'(x) < 0$  فإن  $(\forall x \in ]0,1[); g'_n(x) < 0$  ومنه

 $g_n$  تناقصية قطعاً على  $]0,1[$ 
(ب) لنبين أن  $\exists! \alpha_n \in ]0,1[; f(\alpha_n) = (\alpha_n)^n$ 

$g_n$  متصلة و تناقصية قطعاً على المجال  $]0,1[$  إذن  $g_n$  تقابل من  $]0,1[$  نحو  $]0,1[$  ولدينا

$$g_n(]0,1[) = \left] \lim_{x \rightarrow 1^-} g_n(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} g_n(x) \right[ = ]-1, +\infty[$$

و بما أن  $0 \in ]-1, +\infty[$  فإن للمعادلة ل سابق و حيد  $\alpha_n$  ب  $g_n$  و  $\alpha_n \in ]0,1[$  يعني  $g_n(\alpha_n) = 0$   
و بما أن  $g_n(\alpha_n) = f(\alpha_n) - (\alpha_n)^n$  فإن  $f(\alpha_n) = (\alpha_n)^n$  و هذا هو المطلوب:

 $\exists! \alpha_n \in ]0,1[; f(\alpha_n) = (\alpha_n)^n$ 
(ج) لنبين أن  $(\forall n \in \mathbb{N}^*); g_n(\alpha_{n+1}) < 0$ 

حسب السؤال (ج)  $\forall n \in \mathbb{N}^*; n+1 \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \exists! \alpha_{n+1} \in ]0,1[$

ولدينا  $f(\alpha_{n+1}) = (\alpha_{n+1})^{n+1}$  إذن  $f(\alpha_{n+1}) = (\alpha_{n+1})^{n+1} - (\alpha_{n+1})^n = (\alpha_{n+1})^n (\alpha_{n+1} - 1) < 0$   
و هذا هو المطلوب

 $(\forall n \in \mathbb{N}^*); g_n(\alpha_{n+1}) < 0$ 
(د) لنبين أن المتتالية  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  تزايدية قطعاً

لدينا  $\forall n \in \mathbb{N}^* g_n(\alpha_n) = 0$  و  $g_n(\alpha_{n+1}) < 0$

إذن  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) g_n(\alpha_{n+1}) < g_n(\alpha_n)$  و بما أن  $g_n$  تناقصية قطعاً على المجال  $]0,1[$  فإن  $\alpha_{n+1} > \alpha_n$   
ما يعني أن :

 المتتالية  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  تزايدية قطعاً

المتتالية  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  تزايدية و مكبورة ب 1 إذن فهي متقاربة

(4) (أ) لنتحقق من أن  $0 < \alpha_1 \leq l \leq 1$ 

بما أن  $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \alpha_n \in ]0,1[$  فإن  $\lim \alpha_n \in ]0,1[$  و بما أن  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  تزايدية قطعاً فإن  $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \alpha_n \geq \alpha_1$

و منه  $\lim \alpha_n \geq \alpha_1$  نستنتج أن  $l$  نهاية  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  تحقق

 $0 < \alpha_1 \leq l \leq 1$ 
(ب) لنبين أن  $(\forall n \in \mathbb{N}^*); h(\alpha_n) = n$ 

لدينا  $h(x) = -\frac{1}{2} + \frac{\ln(-\ln x)}{\ln x}$

$(\forall x > 0); f(x) = \frac{-\ln x}{\sqrt{x}}$  و بما أن  $(\forall n \in \mathbb{N}^*); h(\alpha_n) = -\frac{1}{2} + \frac{\ln(-\ln(\alpha_n))}{\ln(\alpha_n)}$

فإن  $(\alpha_n)^n = f(\alpha_n) = \frac{-\ln \alpha_n}{\sqrt{\alpha_n}}$

## Ammarimaths

و منه

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*); h(\alpha_n) = -\frac{1}{2} + \frac{\ln\left((\alpha_n)^{n+\frac{1}{2}}\right)}{-(\alpha_n)^{n+\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{2} + \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\ln(\alpha_n)}{-(\alpha_n)^{n+\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{2} + \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{-(\alpha_n)^{n+\frac{1}{2}}}{-(\alpha_n)^{n+\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{2} + \left(n + \frac{1}{2}\right) = n$$

وبالتالي:

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*); h(\alpha_n) = n$$

(ج) لنبين أن  $l = 1$ نفترض أن  $l \neq 1$  إذن  $0 < l < 1$  و بما أن الدالة  $h$  معرفة و متصلة على المجال  $]0, 1[$  فإن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} h(\alpha_n) = h(l)$ و هذا غير ممكن لأن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} h(\alpha_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$  إذن الافتراض الأول خاطئ و عكسه هو الصحيح

$$l = 1$$

(د) لنبين أن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_n)^n = 0$ لدينا  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \alpha_n = \ln(1) < 0$  إذن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln \alpha_n = -\infty$  و منه  $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \ln \alpha_n} = 0$  و هذا هو المطلوب

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_n)^n = 0$$

(II- 1) لندرس إشارة التكامل  $\int_x^1 f(x) dx$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}^*$ لدينا  $0 < x < 1 \Rightarrow \ln x < 0 \Rightarrow f(x) > 0 \Rightarrow \int_x^1 f(x) dx > 0$ و  $x > 1 \Rightarrow \ln x > 0 \Rightarrow f(x) < 0 \Rightarrow \int_x^1 f(x) dx > 0$  و  $x = 1 \Rightarrow \int_x^1 f(x) dx = 0$ 

نستنتج أن

$$(\forall x \in ]0, +\infty[); \int_x^1 f(x) dx \geq 0$$

(ب) لنبين أن  $(x \in \mathbb{R}_+^*); \int_x^1 f(x) dx = 4 - 4\sqrt{x} + 2\sqrt{x} \ln x$ لدينا  $(x \in \mathbb{R}_+^*); \int_x^1 f(x) dx = \int_x^1 \frac{-\ln x}{\sqrt{x}} dx = \left[ 2\sqrt{x}(-\ln x) \right]_x^1 - \int_x^1 (2\sqrt{x}) \left( \frac{-1}{x} \right) dx = 2\sqrt{x} \ln x + 2 \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ 

$$= 2\sqrt{x} \ln x + 2 \left[ 2\sqrt{x} \right]_x^1 = 2\sqrt{x} \ln x + 4(1 - \sqrt{x}) = 4 - 4\sqrt{x} + 2\sqrt{x} \ln x$$

و منه

$$(x \in \mathbb{R}_+^*); \int_x^1 f(x) dx = 4 - 4\sqrt{x} + 2\sqrt{x} \ln x$$

(ج) حساب مساحة الحيز المحصور بالمنحنى (C) و المستقيمت التي معادلاتها على التوالي  $x = 1$  و  $x = e^2$  و  $x = 0$ لتكن  $S$  هذه المساحة ب  $cm^2$  لدينا  $S = \left( \int_{e^2}^1 f(x) dx \right) cm^2 = \left( 4 - 4\sqrt{e^2} + 2\sqrt{e^2} \ln e^2 \right) cm^2 = 4cm^2$ 

المساحة المطلوبة هي

$$S = 4cm^2$$

## Ammarimaths

$$(2) \text{ لكل } n \text{ من } \mathbb{N}^* \text{ نضع: } u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

(أ) لدينا  $f$  متصلة وتناقصية قطعاً على  $]0,1[$  و  $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right] \subset ]0,1[$  إذن  $f$  متصلة وتناقصية قطعاً على  $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$  ومنه

$$\frac{k}{n} \leq x \leq \frac{k+1}{n} \Rightarrow f\left(\frac{k}{n}\right) \geq f(x) \geq f\left(\frac{k+1}{n}\right) \Rightarrow \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right) dx \geq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx \geq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k+1}{n}\right) dx$$

$$\text{ولدينا } \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k+1}{n}\right) dx = \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \text{ و } \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right) dx = \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

نستنتج أن لكل  $n$  و  $k$  من  $\mathbb{N}$  بحيث  $n \geq 2$  و  $1 \leq k \leq n-1$  لدينا:

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$(ب) \text{ المتفاوتة السابقة تستلزم أن: } \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \sum_{k=1}^{k=n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx \leq \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$\text{لدينا } f(1) = 0 \text{ إذن } \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = u_n$$

$$\text{ولدينا } \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) = \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=2}^{k=n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = u_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\text{كما أن } \sum_{k=1}^{k=n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx = \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x) dx$$

$$\text{نستنتج بعد التعويض في (1) أن: } (\forall n \in \mathbb{N}^*); u_n \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt \leq u_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\text{يعني أن } (\forall n \in \mathbb{N}^*); \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt \leq u_n \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*); \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt \leq u_n \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$(ج) \text{ حسب السؤال (ب) و بوضع } x = \frac{1}{n} \text{ نحصل على } \int_x^1 f(x) dx \leq u_n \leq xf(x) + \int_x^1 f(x) dx$$

$$\text{ولدينا } \lim_{n \rightarrow +\infty} xf(x) + \int_x^1 f(x) dx = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x \frac{\ln x}{\sqrt{x}} + 4 - 4\sqrt{x} + 2\sqrt{x} \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\sqrt{x} \ln x + 4 - 4\sqrt{x} + 2\sqrt{x} \ln x = 4$$

$$\text{و } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_x^1 f(x) dx = \lim_{x \rightarrow 0^+} 4 - 4\sqrt{x} + 2\sqrt{x} \ln x = 4$$

إذن حسب خاصيات النهايات و الترتيب

$$\lim u_n = 4$$

التمرين السادس

$$g \text{ الدالة المعرفة على المجال } [0, +\infty[ \text{ ب } g(x) = \int_{\sqrt{x}}^1 e^{-t^2} dt \text{ و نضع } k(x) = \int_1^x e^{-t^2} dt$$

$$(1) \text{ أ) لدينا } g(x) = \int_{\sqrt{x}}^1 e^{-t^2} dt = -\int_1^{\sqrt{x}} e^{-t^2} dt = -k(\sqrt{x})$$

أذن

$$(\forall x \in \mathbb{R}); g(x) = -k(\sqrt{x})$$



## Ammarimaths

(ب) اتصال و اشتقاق الدالة  $g$ 

الدالة  $t \rightarrow e^{-t^2}$  متصلة و قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  إذن الدالة  $k$  متصلة و قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  (أصلية  $\varphi$  التي تنعدم عند 1)  
و الدالة  $t \rightarrow \sqrt{t}$  متصلة على  $[0, +\infty[$  و قابلة للاشتقاق على  $[0, +\infty[$  (مركب  $k$  و  $\psi$ )  
إذن:

$$g \text{ متصلة على } [0, +\infty[ \text{ و قابلة للاشتقاق على } [0, +\infty[$$

(ج) حساب  $g'(x)$ 

$$\text{لدينا } (\forall x \in ]0, +\infty[); g'(x) = -k'(\sqrt{x}) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-e^{-x^2}}{2\sqrt{x}}$$

$$(\forall x \in ]0, +\infty[); g'(x) = \frac{-e^{-x^2}}{2\sqrt{x}}$$

بما أن  $(\forall x \in ]0, +\infty[); g'(x) < 0$  فإن  $g$  تناقصية قطعاً على  $]0, +\infty[$  و بما أنها متصلة على يمين 0 فإنها تناقصية قطعاً على  $[0, +\infty[$

$$\text{الدالة } g \text{ تناقصية قطعاً على } [0, +\infty[$$

$$(2) \text{ لنبين أن } \forall (x \in \mathbb{R}_+^*); \frac{g(x) - g(0)}{x} < \frac{-e^{-x^2}}{2\sqrt{x}}$$

ليكن  $x$  من  $\mathbb{R}_+^*$  الدالة  $g$  متصلة على المجال  $[0, x]$  و قابلة للاشتقاق على  $]0, x[$

إذن حسب مبرهنة التزايد المتناهية يوجد  $c$  من  $]0, x[$  بحيث

$$\frac{g(x) - g(0)}{x} = g'(c) = \frac{-e^{-c^2}}{2\sqrt{c}}$$

$$0 < c < x \Rightarrow \begin{cases} 0 < 2\sqrt{c} < 2\sqrt{x} \\ c^2 < x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} < \frac{1}{2\sqrt{c}} \\ -x^2 < -c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < \frac{1}{2\sqrt{x}} < \frac{1}{2\sqrt{c}} \\ 0 < e^{-x^2} < e^{-c^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{e^{-x^2}}{2\sqrt{x}} < \frac{e^{-c^2}}{2\sqrt{c}} \Rightarrow \frac{-e^{-x^2}}{2\sqrt{x}} < \frac{-e^{-c^2}}{2\sqrt{c}}$$

الصفحة (8)

$$\text{ومنه } \forall (x \in \mathbb{R}_+^*); \frac{g(x) - g(0)}{x} < \frac{-e^{-x^2}}{2\sqrt{x}}$$

$$\forall (x \in \mathbb{R}_+^*); \frac{g(x) - g(0)}{x} < \frac{-e^{-x^2}}{2\sqrt{x}}$$

(ب) دراسة قابلية اشتقاق الدالة  $g$  على يمين الصفر و التأويل الهندسي للنتيجة المحصل عليها

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x} = -\infty \text{ إذن } \begin{cases} \forall (x \in \mathbb{R}_+^*); \frac{g(x) - g(0)}{x} < \frac{-e^{-x^2}}{2\sqrt{x}} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-e^{-x^2}}{2\sqrt{x}} = -\infty \end{cases} \text{ لدينا :}$$

و بالتالي  $g$  غير قابلة للاشتقاق على يمين 0 و مبيان  $g$  يقبل نصف مماس عمودي (موجه نحو الأسفل)

و بالتالي  $g$  غير قابلة للاشتقاق على يمين 0 و مبيان  $g$  يقبل نصف مماس عمودي (موجه نحو الأسفل)

