

# أجوبة امتحان الدورة الإستدراكية 2013

## التمرين الأول

1

منهجية التفكير في هذا السؤال :

نضع  $\alpha = (x-1)(y-1)$  و  $\beta = (x-2)(y-2)$  ونريد أن نبين أن :  $\forall (x,y) \in G^2 ; x * y \in G$  يعني نريد أن نبين أن :  $\forall (x,y) \in G^2 ; 1 < x * y < 2$  من أجل ذلك سوف نحتاج إلى أن نبين أن :

$\forall (x,y) \in G^2 ; x * y > 1$  و  $x * y < 2$  يعني سوف نحتاج إلى أن نبين أن :

$$\forall (x,y) \in G^2 ; \frac{2\alpha + \beta}{\alpha + \beta} > 0 \text{ و } \frac{2\alpha + \beta}{\alpha + \beta} < 2$$

يعني :  $\forall (x,y) \in G^2 ; \alpha + \beta > 0$  و  $\alpha > 0$  و  $\beta > 0$  إلى العمل : ليكن  $x$  و  $y$  عنصرين من المجال  $G = ]1,2[$ .

إذن :  $1 < x < 2$  و  $1 < y < 2$ .

و منه :  $0 < (x-1) < 1$  و  $0 < (y-1) < 1$ .

أي :  $0 < (x-1)(y-1) < 1$

و هذا يعني أن الكمية  $(x-1)(y-1)$  كمية موجبة قطعاً .

يعني :  $(x-1)(y-1) > 0$

و لدينا كذلك :  $1 < x < 2$  و  $1 < y < 2$

إذن :  $-1 < (x-2) < 0$  و  $-1 < (y-2) < 0$

يعني أن :  $(x-2)$  و  $(y-2)$  كميتان سالبتان قطعاً .

إذن : جداولهما كمية موجبة قطعاً . يعني :  $(x-2)(y-2) > 0$

في المرحلة الأولى نبين أن :  $\forall (x,y) \in G^2 ; x * y > 1$

و من أجل ذلك نتطرق من الكتابة :  $(x-1)(y-1) > 0$

و نضيف إلى كلا الطرفين الكمية  $(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)$

نحصل على :  $2(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)$

$$> (x-1)(y-1) + (x-1)(y-2)$$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في الكمية الموجبة قطعاً التالية :

$$\frac{1}{(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)}$$

نحصل على :  $\frac{2(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)}{(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)} > 1$

و هذا يعني أنه :  $\forall (x,y) \in G^2 ; x * y > 1$

في المرحلة الثانية نبين أن : (1)  $\forall (x,y) \in G^2 ; x * y < 2$

و من أجل ذلك نتطرق من الكتابة :  $(x-2)(y-2) > 0$

و نضيف إلى كلا الطرفين الكمية  $(x-2)(y-2)$

$$2(x-2)(y-2) > (x-2)(y-2)$$

ثم نضيف بعد ذلك إلى طرفي هذه المتفاوتة الكمية  $2(x-1)(y-1)$

نجد :  $2(x-1)(y-1) + 2(x-2)(y-2)$

$$> (x-2)(y-2) + 2(x-1)(y-1)$$

يعني :  $2[(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)]$

$$> (x-2)(y-2) + 2(x-1)(y-1)$$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في الكمية الموجبة قطعاً :

$$\frac{1}{(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)}$$

$$2 > \frac{2(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)}{(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)} : \text{ نجد}$$

يعني :  $\forall (x,y) \in G^2 ; 2 > x * y$  (2)

من النتيجة (1) و (2) نستنتج أن :  $1 < x * y < 2$  ;  $\forall (x,y) \in G^2$

يعني :  $\forall (x,y) \in G^2 ; x * y \in G$

و بالتالي \* قانون تركيب داخلي في المجموعة  $G$ .

2

$$f : (\mathbb{R}_+^*, \times) \mapsto (G, *)$$

$$x \mapsto \frac{x+2}{x+1}$$

لدينا  $f$  تطبيق معرف بما يلي :

لكي يكون التطبيق  $f$  تشاكلاً يكفي أن نتحقق من أن :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^* ; f(x \times y) = f(x) * f(y)$$

ليكن  $x$  و  $y$  عنصرين من المجموعة  $\mathbb{R}_+^*$ .

$$f(x) * f(y) = \left(\frac{x+2}{x+1}\right) * \left(\frac{y+2}{y+1}\right) : \text{ لدينا}$$

$$= \frac{2\left(\frac{x+2}{x+1} - 1\right)\left(\frac{y+2}{y+1} - 1\right) + \left(\frac{x+2}{x+1} - 2\right)\left(\frac{y+2}{y+1} - 2\right)}{\left(\frac{x+2}{x+1} - 1\right)\left(\frac{y+2}{y+1} - 1\right) + \left(\frac{x+2}{x+1} - 2\right)\left(\frac{y+2}{y+1} - 2\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{2}{x+1}\right)\left(\frac{1}{y+1}\right) + \left(\frac{-x}{x+1}\right)\left(\frac{-y}{y+1}\right)}{\left(\frac{1}{x+1}\right)\left(\frac{1}{y+1}\right) + \left(\frac{-x}{x+1}\right)\left(\frac{-y}{y+1}\right)}$$



$$= \frac{xy + 2}{xy + 1} = f(x \times y)$$

إذن :  $f(x) * f(y) = f(x \times y)$

إذن  $f$  تشاكل من  $(\mathbb{R}_+^*, \times)$  نحو  $(G, *)$ .

لكي يكون  $f$  تقابلاً يكفي أن يحقق ما يلي :

$$(\forall y \in G), (\exists ! x \in \mathbb{R}_+^*) : f(x) = y$$

أو بتعبير أسهل : يكون  $f$  تطبيقاً تقابلياً عندما يكون للمعادلة  $f(x) = y$

ذات المجهول  $x$  حل وحيد في  $\mathbb{R}_+^*$  مرتبط بـ  $y$ .

ليكن  $y$  عنصراً من المجموعة  $G$  و لنحل في  $\mathbb{R}_+^*$  المعادلة  $f(x) = y$ .

$$\frac{x+2}{x+1} = y : \text{ هذه المعادلة تصبح}$$

نضرب طرفي هذه المعادلة في العدد الغير المنعدم  $(x+1)$

$$(x+2) = y(x+1)$$

يعني :  $x+2 = xy + y$  يعني :  $x(1-y) = (y-1)$

نضرب طرفي هذه المعادلة في العدد الغير المنعدم  $\frac{1}{1-y}$

$$x = \frac{y-2}{1-y} : \text{ نجد}$$

نلاحظ أن التعبير  $\frac{y-2}{1-y}$  وحيد لأنه إذا افترضنا غير ذلك .

$$x = \frac{y'-2}{1-y'} \text{ أي وجود عدد آخر } y' \text{ يحقق}$$

$$\frac{y-2}{1-y} = \frac{y'-2}{1-y'} : \text{ فإنه سوف نحصل على}$$

$$\text{أي : } y - yy' - 2 + 2y' = y' - 2 - yy' + 2y$$



لدينا :  $A^3 = A \times A \times A$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

إذن :  $A^3 = O$

لدينا المصفوفة  $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  هي العنصر المحايد لـ  $+$  في  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

نلاحظ في البداية أن  $A \neq O$

ولدينا :  $A^3 = A \times A^2 = O$

مع :  $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O$

إذن نستنتج أن  $A \neq O$  و توجد مصفوفة و هي  $A^2$  تخالف  $O$

و تحقق  $A \times A^2 = A^2 \times A = O$

إذن حسب التذكير : المصفوفة  $A$  قاسم للصفر في الحلقة  $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$

● (ب 1 II) ●

$$(A^2 - A + I) \times (A + I) = A^3 + A^2 - A^2 - A + A + I$$

$$= A^3 + I = O + I = I$$

و بما أن  $A$  و  $I$  مصفوفتان من  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

فإن المصفوفة  $(A^2 - A + I)$  عنصر من  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

و نعلم أن  $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$  حلقة تبادلية وحدتها  $I$  إذن  $\times$  تبادلي في  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

يعني :  $(A + I) \times (A^2 - A + I) = (A^2 - A + I) \times (A + I) = I$

و بالتالي  $(A + I)$  مصفوفة قابلة للقلب في  $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$

و مقلوبها هو المصفوفة  $(A^2 - A + I)$ .

$$(A + I) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ولدينا كذلك :

$$(A^2 - A + I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

خلاصة :

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ مقلوب المصفوفة } \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ هي المصفوفة}$$



أي :  $(y - y') = 0$  أي :  $y = y'$

و بالتالي فإن التعبير  $\frac{y-2}{1-y}$  وحيد .

إذن المعادلة  $f(x) = y$  تقبل حلا وحيدا و هو  $\frac{y-2}{1-y}$

يكفي الآن أن نتحقق من أن هذا الحل ينتمي إلى  $\mathbb{R}_+^*$  .

يعني أنه يكفي أن نبين أن :  $\forall y \in ]1,2[ ; \frac{y-2}{1-y} > 0$

لدينا :  $1 < y < 2$  إذن :  $-1 < (y-2) < 0$

و لدينا :  $1 < y < 2$  إذن :  $-1 < (1-y) < 0$

إذن  $(y-2)$  و  $(1-y)$  كميّتان سالبتان قطعا .

أي أن خارجهما كمية موجبة قطعا .

يعني :  $\forall y \in ]1,2[ ; \frac{y-2}{1-y} > 0$

إذن :  $f(x) = y$  :  $(\forall y \in G) , (\exists ! x = \frac{y-2}{1-y} \in \mathbb{R}_+^*)$

يعني أن  $f$  تقابل من  $\mathbb{R}_+^*$  نحو  $G$  .

خلاصة :  $f$  تشاكل تقابلي من  $(\mathbb{R}_+^*, \times)$  نحو  $(G, *)$  .

● (ب 2 I) ●

نعلم أن التشاكل التقابلي يحافظ على البنية الجبرية لمجموعة الإنطلاق

و يُحولها إلى مجموعة الوصول .

يعني أنه عندما نتوفر على تشاكل تقابلي  $f$  من مجموعة  $(E, *)$  نحو  $(F, \top)$

فإنه نستنتج البنية الجبرية للمجموعة  $(F, \top)$  انطلاقا من البنية الجبرية

للمجموعة  $(E, *)$  عن طريق التطبيق  $f$  .

و من ثم :

إذا كان  $*$  تبادلي أو تجميعي في  $E$  فإن  $\top$  تبادلي أو تجميعي في  $F$  .

إذا كان  $e$  هو العنصر المحايد للقانون  $*$  في  $E$  فإن  $f(e)$  هو العنصر

المحايد للقانون  $\top$  في  $F$  .

إذا كان  $x'$  هو مماتل  $x$  بالنسبة للقانون  $*$  في  $E$  فإن  $f(x')$  هو مماتل

$f(x)$  بالنسبة للقانون  $\top$  في  $F$

في هذا السؤال لدينا  $f$  تشاكل تقابلي معرف بما يلي :

$$f : (\mathbb{R}_+^*, \times) \mapsto (G, *)$$

إذن نستنتج البنية الجبرية للمجموعة  $(G, *)$  انطلاقا من البنية الجبرية

لـ  $(\mathbb{R}_+^*, \times)$  عن طريق التطبيق  $f$  .

و بما أن  $(\mathbb{R}_+^*, \times)$  زمرة تبادلية عنصرها المحايد هو العدد الحقيقي 1

فإن  $(G, *)$  زمرة تبادلية كذلك عنصرها المحايد هو العدد الحقيقي  $f(1)$

أي العدد  $\frac{3}{2}$  . و للتأكد من ذلك يكفي أن نتحقق من أن :

$$(\forall x \in G) ; x * \frac{3}{2} = \frac{3}{2} * x = x$$

● (ب 1 II) ●

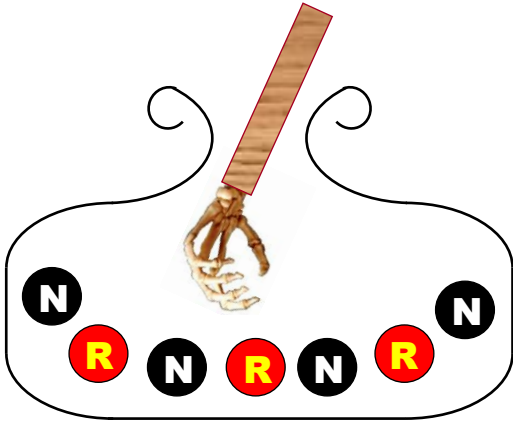
تذكير : لتكن  $(E, *, \top)$  حلقة و  $e$  هو العنصر المحايد للقانون  $*$  في  $E$  .

نقول بأن عنصرا  $x$  من  $E$  قاسم للصفر إذا تحققت الشروط التالية :

$$\begin{cases} x \neq e \\ \exists y \in E \setminus \{e\} ; x \top y = y \top x = e \end{cases}$$

نععتبر الحلقة الواحدية  $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$  التي صفرها  $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

و وحدتها  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$



عندما نسحب عشوائيا بالتتابع و بإحلال أربع كرات من صندوق يحتوي على 7 كرات فإن هذه التجربة العشوائية تحتل  $7^4$  نتيجة ممكنة .

$$\text{يعني : } \text{card}(\Omega) = 7^4 = 2401$$

بحيث :  $\Omega$  هو كون إمكانيات هذه التجربة العشوائية .

$X$  هو المتغير العشوائي الذي يربط كل عملية بعدد الكرات السوداء المسحوبة من الصندوق . إذن القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير العشوائي  $X$  هي 0 أو 1 أو 2 أو 3 أو 4 . يعني :  $X(\Omega) = \{0,1,2,3,4\}$

قانون احتمال المتغير العشوائي  $X$  سيكون إذن التطبيق  $P_X$  المعرف على المجموعة  $\{0,1,2,3,4\}$  نحو المجال  $[0,1]$  بما يلي :

$$P_X : \{0,1,2,3,4\} \mapsto [0,1]$$

$$k \mapsto P_X(k) = p[X = k]$$

لنحسب إذن احتمال كل قيمة  $k$  من قيم المتغير العشوائي  $X$  .

**نحسب :  $p[X = 0]$**

الحدث  $[X = 0]$  هو الحصول على أربع كرات كلها حمراء و توجد  $3^4$  امكانية لسحب الكرات الأربع .

$$\text{إذن : } p[X = 0] = \frac{3^4}{7^4} = \frac{81}{2401}$$

**نحسب :  $p[X = 1]$**

الحدث  $[X = 1]$  هو الحصول على كرة سوداء واحدة و ثلاث كرات حمراء . و من أجل ذلك لدينا :

$4^1$  إمكانية لسحب الكرة السوداء

$C_4^1$  إمكانية لاختيار السحبة صاحبة الكرة السوداء

$3^3$  إمكانية لسحب ثلاث كرات حمراء

$$\text{إذن : } p[X = 1] = \frac{4^1 \times C_4^1 \times 3^3}{7^4} = \frac{432}{2401}$$

**نحسب :  $p[X = 2]$**

الحدث  $[X = 2]$  هو الحصول على كرتين حمراوين و كرتين سوداوين . و من أجل ذلك لدينا :

$4^2$  إمكانية لسحب الكرتين السوداوين .

$C_4^2$  إمكانية لاختيار مكان الكرتين السوداوين .

$3^2$  إمكانية لسحب الكرتين الحمراوين .

$$\text{إذن : } p[X = 2] = \frac{4^2 \times C_4^2 \times 3^2}{7^4} = \frac{864}{2401}$$



لكي يكون  $(E, +, \cdot)$  فضاء متجهي حقيقي يكفي أن نتحقق من الشروط التالية :

$$(\forall x, y \in E) \quad ; \quad \begin{cases} \text{زمرة تبادلية } (E, +) \\ \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y \\ (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x \\ (\alpha \times \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x) \\ 1 \cdot x = x \end{cases}$$

بحيث  $\times$  هو الضرب في  $\mathbb{R}$

و  $+$  هو جمع المصفوفات في  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

و  $\cdot$  هو ضرب مصفوفة في عدد حقيقي .

في البداية نبين أن  $(E, +)$  زمرة جزئية من الزمرة  $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +)$

لدينا  $E$  جزء غير فارغ من  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

لتكن  $M(a, b)$  و  $M(c, d)$  مصفوفتان من  $E$  .

$$\begin{aligned} \text{لدينا : } M(a, b) - M(c, d) &= aI + bA - cI - dA \\ &= (a - c)I + (b - d)A \\ &= M(a - c ; b - d) \in E \end{aligned}$$

إذن  $(E, +)$  زمرة جزئية من الزمرة  $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +)$

و بما أن  $+$  تبادلي في  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  فإن  $(E, +)$  زمرة تبادلية (1)

نستنتج الخاصيات المتبقية من خلال كون  $E$  جزء من الفضاء المتجهي

الحقيقي  $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$  و كون  $E$  جزء مستقر بالنسبة للقانون  $(\cdot)$

و ذلك لأن :  $\forall M(a, b) \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R} ; \alpha \cdot M(a, b) = M(\alpha a, \alpha b) \in E$

$$(2) \quad (\forall A, B \in E) \quad ; \quad \begin{cases} \text{زمرة تبادلية } (E, +) \\ \alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B \\ (\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A \\ (\alpha \times \beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A) \\ 1 \cdot A = A \end{cases} \quad \text{إذن :}$$

من النتيجتين (1) و (2) نستنتج أن :  $(E, +, \cdot)$  فضاء متجهي حقيقي نعتبر الأسرة  $(I, A)$  .

من الواضح أن الأسرة  $(I, A)$  مولدة للفضاء المتجهي  $(E, +, \cdot)$  .

لأن :  $\forall M(a, b) \in E ; M(a, b) = aI + bA$

يعني أن كل مصفوفة من  $E$  تكتب على شكل تآلفية خطية للمصفوفتين  $I$  و  $A$  لنبين الآن أن الأسرة  $(I, A)$  حرة .

من أجل ذلك ننطلق من تآلفية خطية منعدمة للمصفوفتين  $I$  و  $A$  .

$$a \cdot I + b \cdot A = O$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3b & 2b \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & 3b & 2b \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

إذن الأسرة  $(I, A)$  حرة .

و بما أن  $(I, A)$  أسرة حرة و مولدة للفضاء المتجهي  $E$  فإنها أساس لهذا الفضاء المتجهي الحقيقي

$$p(E \cap N) = p_N(E) \times p(N) \text{ : يعني}$$

$$= p_N(E_1) \times p_N(E_2) \times p_N(E_3) \times p(N)$$

$$= \frac{9}{12} \times \frac{8}{11} \times \frac{7}{10} \times \frac{4}{7} = \frac{2016}{9240} = \frac{12}{55}$$



$$p(E) = p(E \cap N) + p(E \cap R)$$

$$= \frac{12}{55} + p_R(E_1) \times p_R(E_2) \times p_R(E_3) \times p(R)$$

$$= \frac{12}{55} + \frac{4}{12} \times \frac{3}{11} \times \frac{2}{10} \times \frac{3}{7}$$

$$= \frac{12}{55} + \frac{72}{9240} = \frac{87}{385}$$



**لنحسب  $p_E(R)$**

$$p_E(R) = \frac{p(R \cap E)}{p(E)} = \frac{p_R(E) \times p(R)}{p(E)}$$

$$= \frac{p_R(E_1) \times p_R(E_2) \times p_R(E_3) \times p(R)}{p(E)}$$

$$= \frac{\frac{4}{12} \times \frac{3}{11} \times \frac{2}{10} \times \frac{3}{7}}{\frac{87}{385}} = \frac{1}{29}$$



لنحل في مجموعة الأعداد العقدية  $\mathbb{C}$  المعادلة التالية :

$$(E) : 2z^2 - 2(a-1)z + (a-1)^2 = 0$$

لدينا :  $\Delta = 4(a-1)^2 - 8(a-1)^2$

$$= -4(a-1)^2$$

$$= (2i(a-1))^2$$

إذن المعادلة (E) تقبل حلين عقديين  $z_1$  و  $z_2$  :

$$z_1 = \frac{2(a-1) + 2i(a-1)}{4} = \frac{(a-1)(1+i)}{2}$$

$$z_2 = \frac{2(a-1) - 2i(a-1)}{4} = \frac{(a-1)(1-i)}{2}$$



لدينا  $a = e^{i\theta}$  مع  $0 < \theta < \pi$  : إذن  $(a-1) = e^{i\theta} - 1$

$$(a-1) = e^{i\theta} - 1 = \cos \theta + i \sin \theta - 1$$

$$= \cos(\theta) - 1 + i \sin(\theta)$$

هدفنا هو البحث عن  $r$  و  $\varphi$  بحيث :  $(a-1) = r e^{i\varphi}$

يعني :  $\cos(\theta) - 1 + i \sin(\theta) = r \cos(\varphi) + i r \sin(\varphi)$

$$\begin{cases} \cos(\theta) - 1 = r \cos(\varphi) \\ \sin(\theta) = r \sin(\varphi) \end{cases} \text{ : أي}$$

من خلال دمج مربعي هاتين المتساويتين :

نجد :  $(\cos(\theta) - 1)^2 + \sin^2 \theta = r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)$

**لنحسب :  $p[X=3]$**

الحدث  $[X=3]$  هو الحصول على ثلاث كرات سوداء و كرة حمراء واحدة . و من أجل ذلك لدينا :  
3<sup>1</sup> إمكانية لسحب الكرة الحمراء .

4<sup>1</sup> إمكانية لاختيار السحبة صاحبة الكرة الحمراء .  
4<sup>3</sup> إمكانية لسحب الكرات السوداء الثلاث .

$$p[X=3] = \frac{3^1 \times C_4^1 \times 4^3}{7^4} = \frac{768}{2401} \text{ : إذن}$$

**لنحسب :  $p[X=4]$**

الحدث  $[X=4]$  هو الحصول على أربع كرات كلها سوداء .

$$p[X=4] = \frac{4^4}{7^4} = \frac{256}{2401} \text{ : إذن}$$

و بالتالي قانون احتمال المتغير العشوائي  $X$  هو التطبيق  $P_X$  المعروف بما يلي

$$P_X : \{0,1,2,3,4\} \mapsto [0,1]$$

$$0 \mapsto P_X(0) = \frac{81}{2401}$$

$$1 \mapsto P_X(1) = \frac{432}{2401}$$

$$2 \mapsto P_X(2) = \frac{864}{2401}$$

$$3 \mapsto P_X(3) = \frac{768}{2401}$$

$$4 \mapsto P_X(4) = \frac{256}{2401}$$

و للتأكد من صحة الجواب يجب أن نحصل على :

$$\frac{81}{2401} + \frac{432}{2401} + \frac{864}{2401} + \frac{768}{2401} + \frac{256}{2401} = 1$$



$$E(X) = \sum_0^4 k \cdot p[X=k]$$

$$= 0 \left( \frac{81}{2401} \right) + 1 \left( \frac{432}{2401} \right) + 2 \left( \frac{864}{2401} \right) + 3 \left( \frac{768}{2401} \right) + 4 \left( \frac{256}{2401} \right)$$

$$= \frac{5488}{2401} = \frac{16}{7}$$



لدينا :  $p(E \cap N) = p_N(E) \times p(N)$

و لدينا كذلك الحدث  $E$  هو الحصول على ثلاث كرات سوداء من خلال ثلاث سحب متتابعة بدون إحلال .

إذن نستطيع تجزئ الحدث  $E$  في المرحلة الثالثة إلى ثلاث أحداث جزئية و مستقلة فيما بينها و هي :

- $E_1$  : الحصول على كرة سوداء في السحبة الأولى
- $E_2$  : الحصول على كرة سوداء في السحبة الثانية
- $E_3$  : الحصول على كرة سوداء في السحبة الثالثة

إذن نكتب :  $E = E_1 \cap E_2 \cap E_3$

و منه :  $p_N(E) = p_N(E_1) \times p_N(E_2) \times p_N(E_3)$



2

II

لدينا  $r_1$  دوران مركزه  $J$  و زاويته  $\frac{\pi}{2}$ .

و لدينا  $r_1(C) = C'$  إذن حسب التعريف العقدي للدوران نكتب :

$$(aff(C') - aff(J)) = e^{\frac{i\pi}{2}}(aff(C) - aff(J))$$

$$\Leftrightarrow \left( c' - \frac{a+i}{2} \right) = i \left( i - \frac{a+i}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow c' = \frac{-1 - ia + a + i}{2} = \frac{(a-1)(1-i)}{2} = z_2$$

و بنفس الطريقة لدينا  $r_2$  دوران مركزه  $K$  و زاويته  $\frac{\pi}{2}$

و لدينا  $r_2(A) = A'$  إذن حسب التعريف العقدي للدوران نكتب :

$$(aff(A') - aff(K)) = e^{\frac{i\pi}{2}}(aff(A) - aff(K))$$

$$\Leftrightarrow \left( a' - \frac{a-i}{2} \right) = i \left( a - \frac{a-i}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow a' = \frac{ia - 1 + a - i}{2} = \frac{(a-1)(1+i)}{2} = z_1$$

إذن :  $c' = z_2$  و  $a' = z_1$

3

II

$$\frac{a' - c'}{a - 1} = \frac{\frac{(a-1)(i+1)}{2} - \frac{(a-1)(1-i)}{2}}{\frac{a-1}{1}} \text{ لدينا :}$$

$$= \frac{(a-1)(i+1-1+i)}{2} \times \frac{1}{(a-1)}$$

$$= \frac{i(a-1)}{(a-1)} = i$$

$$\text{إذن : } \frac{a' - c'}{a - 1} = i \text{ و منه : } \arg\left(\frac{a' - c'}{a - 1}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$$

$$\text{يعني : } \arg(\overrightarrow{B'A}, \overrightarrow{C'A'}) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$$

و هذا يعني أن المستقيم  $(AB')$  عمودي على المستقيم  $(A'C')$ .  
أي أن المستقيم  $(AB')$  ارتفاع في المثلث  $A'B'C'$   
لأن  $B' \in (AB')$  و  $(A'C') \perp (AB')$ .

التمرين الرابع

1

I

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{1 + (x \ln x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (0^+)^2}} \text{ لدينا :}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + 0}} = 1 = f(0)$$

$$\text{إذن : } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

و هذا يعني أن الدالة  $f$  متصلة على يمين الصفر.  
لنحسب الآن نهاية  $f$  بجوار  $+\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + (x \ln x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (+\infty)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\text{إذن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\text{يعني : } \cos^2 \theta - 2 \cos \theta + 1 + \sin^2 \theta = r^2$$

$$\text{يعني : } 2(1 - \cos \theta) = r^2$$

$$\text{يعني : } 2 \left( 1 - \left( 2 \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) - 1 \right) \right) = r^2$$

$$\text{يعني : } 2 \left( 2 - 2 \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right) = r^2$$

$$\text{يعني : } 4 \left( 1 - \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right) = r^2$$

$$\text{يعني : } 4 \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) = r^2$$

$$\text{يعني : } r > 0 \text{ و } r = 2 \sin \left( \frac{\theta}{2} \right)$$

يكفي الآن تحديد قيمة  $\varphi$ . و نطلق من الكتابة  $\sin \theta = r \sin \varphi$

$$\text{يعني : } \sin \left( 2 \cdot \frac{\theta}{2} \right) = 2 \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \sin(\varphi)$$

$$\text{يعني : } 2 \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) = 2 \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \sin(\varphi)$$

$$\text{يعني : } \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) = \sin(\varphi)$$

$$\text{يعني : } \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right)$$

$$\text{يعني : } \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) = \cos \left( \varphi - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\text{يعني : } \frac{\theta}{2} \equiv \varphi - \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\text{يعني : } \varphi \equiv \frac{\theta - \pi}{2} [2\pi]$$

$$\text{إذن : } (a-1) = 2 \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) e^{i \left( \frac{\theta - \pi}{2} \right)}$$

2

I

ب

في البداية لدينا :

$$(1+i) = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}}$$

و لدينا كذلك :

$$(1-i) = \sqrt{2} \left( \cos \left( -\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{4} \right) \right) = \sqrt{2} e^{-i \frac{\pi}{4}}$$

$$\text{إذن : } z_1 = \frac{(a-1)(1+i)}{2} = \frac{1}{2} \cdot 2 \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \cdot \sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}}$$

$$= \sqrt{2} \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) e^{i \frac{\pi}{4}}$$

$$z_2 = \frac{(a-1)(1-i)}{2} = \frac{1}{2} \cdot 2 \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \cdot \sqrt{2} e^{-i \frac{\pi}{4}}$$

$$= \sqrt{2} \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) e^{-i \frac{\pi}{4}}$$

1

II

لدينا  $J$  هي منتصف القطعة  $[AC]$ .

$$\text{إذن : } aff(J) = \frac{aff(A) + aff(C)}{2} = \frac{a+i}{2}$$

و لدينا  $K$  هي منتصف القطعة  $[AB]$ .

$$\text{إذن : } aff(K) = \frac{aff(A) + aff(B)}{2} = \frac{a-i}{2}$$

لدينا :  $\psi(x) = x \ln x \in \left[ \frac{1}{e}, +\infty \right[ \subset \mathbb{R}$

إذن :  $\psi(]0, +\infty[) \subseteq \mathbb{R}$

إذن الدالة  $f = \varphi \circ \psi$  قابلة للاشتقاق على المجال  $]0, +\infty[$ .

ليكن  $x$  عنصرا من المجال  $]0, +\infty[$ . لدينا :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + (x \ln x)^2}} = (1 + (x \ln x)^2)^{-\frac{1}{2}}$$

إذن :  $f'(x) = \frac{-1}{2} (1 + (x \ln x)^2)^{-\frac{1}{2}-1} (1 + (x \ln x)^2)'$

$$= \frac{-1}{2} (1 + (x \ln x)^2)^{-\frac{3}{2}} (2x \ln x)(x \ln x)'$$

$$= \frac{-1}{2} (1 + (x \ln x)^2)^{-\frac{3}{2}} (2x \ln x)(1 + \ln x)$$

$$= \frac{-x \ln x (1 + \ln x)}{(1 + (x \ln x)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

إذن :  $(\forall x > 0) ; f'(x) = \frac{-x \ln x (1 + \ln x)}{(1 + (x \ln x)^2)^{\frac{3}{2}}}$



نلاحظ في البداية أن :  $(\forall x > 0) ; (1 + (x \ln x)^2)^{\frac{3}{2}} > 0$

إذن إشارة  $f'(x)$  تتعلق بإشارتي الكميئين  $(\ln x)$  و  $(1 + \ln x)$ .

الكمية  $\ln x$  تنعدم في 1 و الكمية  $1 + \ln x$  تنعدم في  $\frac{1}{e}$ .

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة  $f$  كما يلي :

| $x$         | 0 | $\frac{1}{e}$               | 1 | $+\infty$ |
|-------------|---|-----------------------------|---|-----------|
| $\ln x$     |   | -                           | 0 | +         |
| $1 + \ln x$ |   | -                           | 0 | +         |
| $f'(x)$     |   | -                           | 0 | +         |
| $f$         | 1 | $f\left(\frac{1}{e}\right)$ | 1 | 0         |



$$\int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \left(\frac{1}{x}\right)' dx = \int \frac{(\ln x)'}{(\ln x)} dx$$

لدينا :  $= \ln(|\ln x|) + c ; c \in \mathbb{R}$

بما أن :  $x \in [e; +\infty[$  فإن  $\ln x \geq 1$

نأخذ الثابتة  $c$  تساوي 0 نجد أن الدالة  $x \rightarrow \ln(\ln x)$  دالة أصلية

للدالة  $x \rightarrow \frac{1}{x \ln x}$  على المجال  $[e; +\infty[$ .

و أشير إلى أن  $x \rightarrow \ln(\ln x)$  دالة معرفة ومتصلة على  $]1; +\infty[$

إذن فهي متصلة على  $[e; +\infty[$  لأن :  $[e; +\infty[ \subset ]1; +\infty[$ .



لدراسة اشتقاق الدالة  $f$  على اليمين في 0 نحسب النهاية التالية :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right)$$

و من أجل ذلك نستعين بالنهايتين التاليتين :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x (\ln x)^2 = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = 0$$

لدينا :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + (x \ln x)^2}} - 1 \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \left( \frac{1 - \sqrt{1 + (x \ln x)^2}}{\sqrt{1 + (x \ln x)^2}} \right)$$

نضرب البسط و المقام في المرافق  $(1 + \sqrt{1 + (x \ln x)^2})$  نجد :

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \left( \frac{1 - \sqrt{1 + (x \ln x)^2}}{\sqrt{1 + (x \ln x)^2}} \right) \left( \frac{1 + \sqrt{1 + (x \ln x)^2}}{1 + \sqrt{1 + (x \ln x)^2}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \left( \frac{1 - 1 - (x \ln x)^2}{\sqrt{1 + (x \ln x)^2} (1 + \sqrt{1 + (x \ln x)^2})} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \left( \frac{-(x \ln x)^2}{\sqrt{1 + (x \ln x)^2} (1 + \sqrt{1 + (x \ln x)^2})} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x (\ln x)^2) \left( \frac{1}{\sqrt{1 + (x \ln x)^2} (1 + \sqrt{1 + (x \ln x)^2})} \right)$$

$$= (-0) \left( \frac{1}{\sqrt{1 + (0)^2} (1 + \sqrt{1 + (0)^2})} \right) = (0) \left( \frac{1}{2} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = 0$$

و هذا يعني أن الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على اليمين الصفر و  $f'_d(0) = 0$ .



**تذكير :** إذا كانت  $g$  دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على مجال  $I$ .

و كانت  $f$  دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على مجال  $J$ .

إذن تكون الدالة  $f \circ g$  قابلة للاشتقاق على المجال  $I$  إذا كان :  $g(I) \subseteq J$



$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + (x \ln x)^2}} \quad \text{لدينا :}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) ; \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \quad \text{نضع :}$$

و نضع :  $\forall x \in ]0; +\infty[ ; \psi(x) = x \ln x$

إذن :  $\forall x \in ]0; +\infty[ ; f(x) = \varphi \circ \psi(x)$

لدينا  $\psi$  دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال  $]0, +\infty[$

و  $\varphi$  دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$ .

إذن تكون الدالة  $\psi \circ \varphi$  قابلة للاشتقاق على  $]0; +\infty[$

إذا كان :  $\psi(]0, +\infty[) \subseteq \mathbb{R}$

ليكن  $x$  عنصرا من المجال  $]0, +\infty[$ .

و هذا يعني حسب خاصية التأيير و النهايات أن :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_e^x f(t) dt = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt \quad \text{إذن :}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \int_0^e f(t) dt + \int_e^x f(t) dt \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \int_0^e f(t) dt \right) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \int_e^x f(t) dt \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\text{constante réelle}) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \int_e^x f(t) dt \right)$$

$$= (+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty \quad \text{إذن :}$$

من جهة ثانية ، لدينا :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\ln x) < \int_e^x f(t) dt < \ln(\ln x)$$

نضرب أطراف هذا التأيير في العدد الموجب قطعاً  $x$  نجد :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\ln(\ln x)}{x} \right) < \frac{1}{x} \int_e^x f(t) dt < \frac{\ln(\ln x)}{x}$$

لنحسب النهاية :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln(\ln x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln(\ln x)}{x} \right) \times \frac{\ln x}{\ln x} \quad \text{لدينا :}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln(\ln x)}{\ln x} \right) \times \frac{\ln x}{x}$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty \\ y = \ln x}} \frac{\ln y}{y} \times \frac{\ln x}{x} = 0 \times 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln(\ln x)}{x} \right) = 0 \quad \text{إذن :}$$

و نحصل بذلك على الوضعية التالية :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\ln(\ln x)}{x} \right) < \frac{1}{x} \int_e^x f(t) dt < \frac{\ln(\ln x)}{x}$$

$x \rightarrow +\infty$        $x \rightarrow +\infty$

**0**      **0**

و منه حسب خاصية النهايات و التأيير نستنتج أن :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_e^x f(t) dt = 0$$

## 2 ب

ليكن  $t$  عنصراً من المجال  $[e, +\infty[$ .

ننطلق من المتفاوتة  $0 < 1$  و نضيف إلى طرفيها الكمية  $(t \ln t)^2$

$$\text{نجد : } (t \ln t)^2 < 1 + (t \ln t)^2$$

$$\text{و منه : } \sqrt{(t \ln t)^2} < \sqrt{1 + (t \ln t)^2}$$

$$(1) \quad (\forall t \geq e) ; t \ln t < \sqrt{1 + (t \ln t)^2}$$

و لدينا كذلك  $t \geq e$  إذن  $\ln t \geq 1$ .

نضرب هاتين المتفاوتتين طرفاً بطرف نجد :

$$(\forall t \geq e) ; t \ln t > 1$$

التي تصبح :

$$(\forall t \geq e) ; (t \ln t)^2 > 1$$

نضيف إلى طرفي هذه المتفاوتة الكمية  $(t \ln t)^2$

$$\text{نجد : } (\forall t \geq e) ; 2(t \ln t)^2 > 1 + (t \ln t)^2$$

$$(2) \quad (\forall t \geq e) ; \sqrt{2} t \ln t > \sqrt{1 + (t \ln t)^2}$$

من النتيجتين (1) و (2) نستنتج أن :

$$(\forall t \geq e) ; t \ln t < \sqrt{1 + (t \ln t)^2} < \sqrt{2} t \ln t$$

## 2 ج

من خلال آخر تأيير حصلنا عليه نستنتج أن :

$$(\forall t \geq e) ; \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{t \ln t} \right) < \frac{1}{\sqrt{1 + (t \ln t)^2}} < \frac{1}{t \ln t}$$

ليكن  $x$  عدداً حقيقياً بحيث  $x \geq e$ .

ندخل التكامل  $\int_e^x dt$  على هذا التأيير نجد :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_e^x \left( \frac{1}{t \ln t} \right) dt < \int_e^x \frac{1}{\sqrt{1 + (t \ln t)^2}} dt < \int_e^x \frac{1}{t \ln t} dt$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} [\ln(\ln t)]_e^x < \int_e^x \frac{1}{\sqrt{1 + (t \ln t)^2}} dt < [\ln(\ln t)]_e^x \quad \text{يعني :}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\ln x) < \int_e^x \frac{1}{\sqrt{1 + (t \ln t)^2}} dt < \ln(\ln x) \quad \text{يعني :}$$

## 2 د

لدينا حسب آخر تأيير :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\ln x) < \int_e^x \frac{1}{\sqrt{1 + (t \ln t)^2}} dt < \ln(\ln x)$$

$$\text{إذن : } \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\ln x) < \int_e^x f(t) dt < \ln(\ln x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(\ln x) = \ln(\ln(+\infty)) = \ln(+\infty) = +\infty \quad \text{لدينا :}$$

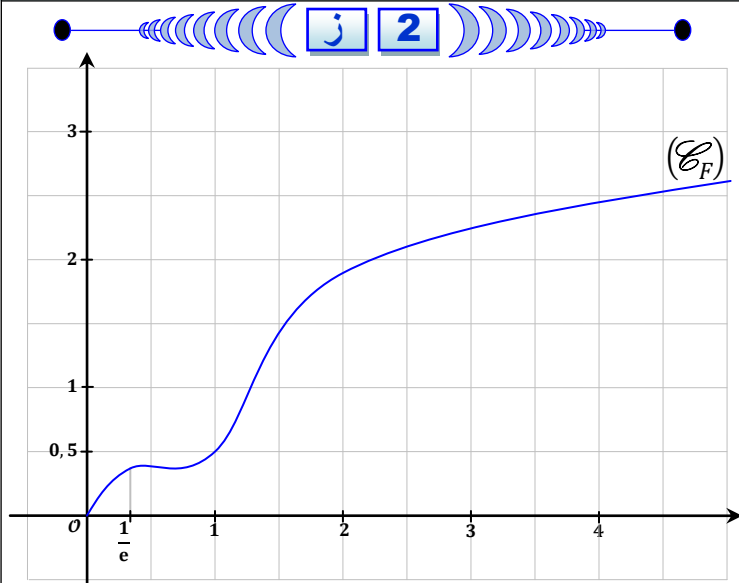
إذن نحصل على الوضعية التالية :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\ln x) < \int_e^x f(t) dt < \ln(\ln x)$$

$x \rightarrow +\infty$        $x \rightarrow +\infty$

$+\infty$        $+\infty$





### 2 ز

نستعمل النهاية :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$  لدينا :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - F(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{F(x)}{x}\right) = (+\infty)(1 - 0) = +\infty$$

إذن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$

من جهة ثانية لدينا  $\varphi$  معرفة على  $[0, +\infty[$  بما يلي :  $\varphi(x) = x - F(x)$  ولدينا كذلك  $F$  قابلة للاشتقاق على  $[0, +\infty[$  بحيث :  $F'(x) = f(x)$

إذن  $\varphi$  دالة قابلة للاشتقاق على المجال  $[0, +\infty[$  ولدينا :  $\varphi'(x) = 1 - F'(x) = 1 - f(x)$  نلاحظ أنه إذا كان  $x = 0$  فإن  $f(x) = 1$  يعني :  $\varphi'(x) = 0$  أي :  $1 - f(x) = 0$

إذا كان  $0 \leq x \leq \frac{1}{e}$  فإن  $f(0) \geq f(x) \geq f\left(\frac{1}{e}\right)$  لأن  $f$  دالة تناقصية على المجال  $\left[0, \frac{1}{e}\right]$  .  
إذن :  $1 \geq f(x) \geq f\left(\frac{1}{e}\right)$

يعني :  $1 - f(x) \geq 0$  أي :  $\varphi'(x) \geq 0$  .  
إذن  $\varphi$  دالة تزايدية على المجال  $\left[0, \frac{1}{e}\right]$  .

إذا كان  $\frac{1}{e} \leq x \leq 1$  فإن  $f\left(\frac{1}{e}\right) \leq f(x) \leq f(1)$  لأن  $f$  دالة تزايدية على المجال  $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$  .

إذن  $f\left(\frac{1}{e}\right) \leq f(x) \leq 1$  يعني :  $1 - f(x) \geq 0$  أي :  $\varphi'(x) \geq 0$  .  
إذن  $\varphi$  دالة تزايدية على المجال  $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$  .

إذا كان  $x \geq 1$  فإن  $f(x) \leq f(1)$  لأن  $f$  دالة تناقصية على المجال  $[1, +\infty[$  .

إذن :  $f(x) \leq 1$  يعني :  $1 - f(x) \geq 0$  أي :  $\varphi'(x) \geq 0$  .  
إذن  $\varphi$  دالة تزايدية على المجال  $[1, +\infty[$  .

خلاصة :  $\varphi$  دالة تزايدية قطعاً على المجال  $[0, +\infty[$

نستغل إذن هذه النهاية لحساب :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$

لدينا :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left( \int_0^e f(t) dt + \int_e^x f(t) dt \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left( \int_0^e f(t) dt \right) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left( \int_e^x f(t) dt \right) \\ &= \left( \frac{1}{+\infty} \right) \times (\text{constante réelle}) + 0 = 0 \end{aligned}$$

إذن :  $(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$

ويمكن تفسير النهايتين (1) و (2) بقولنا : المنحنى  $(E_F)$  يقبل فرعاً شلجيمياً في اتجاه محور الأفاصيل .

### 2 هـ

لدراسة نقط انعطاف المنحنى  $(E_F)$  ندرس إشارة المشتقة الثانية  $F''(x)$  .

لدينا  $F$  دالة عديدة معرفة على  $[0, +\infty[$  بما يلي :  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  .  
إذن  $F$  دالة أصلية للدالة  $f$  على المجال  $[0, +\infty[$  .

أو بتعبير الاشتقاق نكتب :  $F'(x) = f(x)$  ;  $\forall x \in [0, +\infty[$  .  
وبما أن الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على المجال  $[0, +\infty[$  فإن الدالة  $F'$  قابلة للاشتقاق على المجال  $[0, +\infty[$  .

ولدينا :  $(\forall x \in ]0, +\infty[) ; F''(x) = f'(x) = \frac{-x \ln x (1 + \ln x)}{(1 + (x \ln x)^2)^2}$

إذن تنعدم الدالة  $F''(x)$  على المجال  $]0, +\infty[$  عندما تنعدم الكميئين  $(\ln x)$  و  $(1 + \ln x)$  .

أي تنعدم الدالة  $F''(x)$  إذا كان  $x = 1$  أو  $x = \frac{1}{e}$  .

و تتغير إشارتها بجوار تلك النقطتين وذلك حسب جدول الإشارة السابق .  
وبالتالي  $(E_F)$  يقبل نقطتي انعطاف أفصولاهما على التوالي  $\frac{1}{e}$  و 1 .



ويمكن أن نصيف جدول التغير للمنحنى  $(E_F)$  وذلك انطلاقاً من جدول إشارة  $f'(x)$  .

لأن :  $\forall x \in ]0, +\infty[ ; F''(x) = f'(x)$

| $x$      | 0 | $\frac{1}{e}$ | 1 | $+\infty$   |   |
|----------|---|---------------|---|-------------|---|
| $F''(x)$ | - | 0             | + | 0           | - |
| $(E_F)$  |   | نقطة انعطاف   |   | نقطة انعطاف |   |





و منه :  $1 < \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < f(\alpha_n)$  (\*)

بما أن  $\alpha_n \geq n \geq 1$  فإن  $n \in [1; +\infty[$  و  $\alpha_n \in [1; +\infty[$   
لدينا  $\alpha_n \geq n$  إذن  $f(\alpha_n) \leq f(n)$  لأن  $f$  تناقصية على  $[1; +\infty[$   
إذن بالرجوع إلى التأطير (\*) نكتب :

$$0 < 1 < \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < f(\alpha_n) < f(n)$$

يعني :  $0 < \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < f(n)$  (1)

في المرحلة الثانية نطبق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة  $F$  في  $[0; n]$   
إذن يوجد عنصر  $\varepsilon$  من  $]0; n[$  بحيث :

$$\frac{F(n) - F(0)}{n - 0} = F'(\varepsilon) = f(\varepsilon)$$

يعني :  $0 < \varepsilon < n$  و  $\frac{F(n)}{n} = f(\varepsilon)$

لدينا :  $0 < \varepsilon < n$  إذن :  $f(0) < f(\varepsilon) < f(n)$

يعني :  $1 < \frac{F(n)}{n} < f(n)$  أي :  $0 < 1 < \frac{F(n)}{n} < f(n)$

يعني :  $0 < \frac{F(n)}{n} < f(n)$  أي :  $-f(n) < \frac{-F(n)}{n} < 0$  (2)

نجمع التأطيرين (1) و (2) طرفا بطرف نجد :

$$-f(n) < \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} - \frac{F(n)}{n} < f(n)$$

ما يهمنا في هذا التأطير الغريب هو الشق الأيمن فقط .

أي :  $\frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} - \frac{F(n)}{n} < f(n)$

الذي يصبح :  $\frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < \frac{F(n)}{n} + f(n)$  (3)

و من التأطير (1) نستنتج أن :  $0 < \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n}$  (4)

إذن من (3) و (4) نستنتج أن :

$$(\forall n \geq 1) ; 0 < \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < \frac{F(n)}{n} + f(n) (*)$$

### 4 ب

نعلم حسب الأسئلة السابقة أن :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

إذن :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{F(n)}{n} + f(n) \right) = 0$

و منه فإن التأطير (\*) يُصبح :

$$(\forall n \geq 1) ; 0 < \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < \frac{F(n)}{n} + f(n)$$



### 3 ب

لدينا  $\varphi$  دالة متصلة و تزايدية قطاعا على المجال  $[0, +\infty[$  .  
إذن  $\varphi$  تقابل من المجال  $[0, +\infty[$  نحو صورته  $\varphi([0, +\infty[)$  .  
و لدينا :  $\varphi([0, +\infty[) = \left[ \varphi(0); \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) \right[ = [0, +\infty[$   
إذن  $\varphi$  تقابل من المجال  $[0, +\infty[$  نحو المجال  $[0, +\infty[$   
و هذا يعني حسب تعريف التقابل :

$$(\forall y \in [0, +\infty[), (\exists! x \in [0, +\infty[) ; \varphi(x) = y$$

ليكن  $n$  عددا صحيحا طبيعيا .

إذن :  $n \in [0, +\infty[$  لأن  $n \in \mathbb{N} \subset [0, +\infty[$

إذن يوجد عنصر وحيد نرمز له بـ  $\alpha_n$  في المجال  $[0, +\infty[$

بحيث :  $\varphi(\alpha_n) = n$

أو بتعبير آخر : المعادلة  $\varphi(x) = n$  ذات المجهول  $x$  تقبل حلا وحيدا

و هو  $\alpha_n$  في المجال  $[0, +\infty[$  و ذلك كيفما كان  $n$  من  $\mathbb{N}$  .

أو بتعبير أخير :  $\varphi(\alpha_n) = n$  ;  $(\exists! \alpha_n \geq 0)$  ;  $(\forall n \in \mathbb{N})$

### 3 ج

رأينا حسب السؤال ب) أن :  $\alpha_n \geq 0$  ;  $(\forall n \in \mathbb{N})$

إذن  $F(\alpha_n) \geq F(0)$  لأن  $F$  تزايدية على المجال  $[0, +\infty[$  .

يعني أن :  $F(\alpha_n) \geq 0$  ;  $(\forall n \in \mathbb{N})$  (1)

و نعلم أن :  $\varphi(x) = x - F(x)$  ;  $(\forall x \geq 0)$

إذن :  $\varphi(\alpha_n) = \alpha_n - F(\alpha_n)$  لأن  $\alpha_n \geq 0$

يعني :  $F(\alpha_n) = \alpha_n - \varphi(\alpha_n)$  (2)

بدمج (1) و (2) نحصل على :  $\alpha_n - \varphi(\alpha_n) \geq 0$

يعني :  $\alpha_n \geq \varphi(\alpha_n)$

و نعلم أن :  $\varphi(\alpha_n) = n$  ;  $(\forall n \in \mathbb{N})$

إذن :  $\alpha_n \geq n$  ;  $(\forall n \in \mathbb{N})$

نلاحظ أن :  $\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$  إذن نحصل على الوضعية التالية :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; \alpha_n \geq n$$

إذن حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n) = +\infty$

### 4 ا

ليكن  $n \in \mathbb{N}$  و  $n \geq 1$  .

لدينا الدالة  $F$  متصلة و قابلة للاشتقاق على المجال  $[0, +\infty[$

بحيث :  $F'(x) = f(x)$  ;  $\forall x \in [0, +\infty[$

إذن بإمكاننا تطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة  $F$  في أي مجال

محدود يوجد ضمن  $[0, +\infty[$  .

في المرحلة الأولى : نختار المجال  $[0; \alpha_n]$  .

لدينا  $[0; \alpha_n] \subset [0, +\infty[$  لأن  $\alpha_n \geq 0$  ;  $(\forall n \in \mathbb{N})$

إذن ، حسب مبرهنة التزايدات المنتهية ، يوجد عنصر  $c$  من المجال

$$]0; \alpha_n[ \text{ بحيث : } \frac{F(\alpha_n) - F(0)}{\alpha_n - 0} = F'(c) = f(c)$$

يعني :  $0 < c < \alpha_n$  و  $\frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} = f(c)$

لدينا :  $0 < c < \alpha_n$  إذن :  $f(0) < f(c) < f(\alpha_n)$

إذن بالرجوع إلى المتساوية (\*\*): نجد :

$$\frac{f(n+1) - f(n)}{(n+1) - n} = \frac{1}{(1+c^2) \arctan(c)}$$

يعني :

$$\ln(\arctan(n+1)) - \ln(\arctan(n)) = \frac{1}{(1+c^2) \arctan(c)}$$

يعني :

$$\ln(\arctan(n)) - \ln(\arctan(n+1)) = \frac{-1}{(1+c^2) \arctan(c)}$$

نضرب طرفي هذه المتساوية في العدد الغير المنعدم  $n^2$  نجد :

$$n^2 [\ln(\arctan(n)) - \ln(\arctan(n+1))] = \frac{-n^2}{(1+c^2) \arctan(c)}$$

$$v_n = \frac{-n^2}{(1+c^2) \arctan(c)}$$

و باستعمال نتيجة السؤال (1) نجد :

خلاصة :

$$(\forall n \geq 1), (\exists c \in ]n; n+1[); v_n = \frac{-n^2}{(1+c^2) \arctan(c)}$$



لدينا :  $n < c < n+1$

ندخل الدالة  $\arctan$  على هذا التأطير و علما أنها تزايدية قطعا على  $\mathbb{R}$  نجد :

$$(1) \arctan(n) < \arctan(c) < \arctan(n+1)$$

و لدينا كذلك :  $n < c < n+1$

$$(2) (1+n^2) < (1+c^2) < 1+(n+1)^2$$

نضرب التأطيرين (1) و (2) طرفا بطرف نجد :

$$(1+n^2)\arctan(n) < (1+c^2)\arctan(c) < (1+(n+1)^2)\arctan(n+1)$$

ندخل على هذا التأطير دالة المقلوب نجد :

$$\frac{1}{(1+(n+1)^2)\arctan(n+1)} < \frac{1}{(1+c^2)\arctan(c)} < \frac{1}{(1+n^2)\arctan(n)}$$

و نضرب أطرف هذا التأطير في العدد السالب قطعا  $-n^2$  نجد :

$$\frac{-n^2}{(1+n^2)\arctan(n)} < \frac{-n^2}{(1+c^2)\arctan(c)} < \frac{-n^2}{(1+(n+1)^2)\arctan(n+1)}$$

و نستغل بعد ذلك نتيجة السؤال (2) نجد :

$$\frac{-n^2}{(1+n^2)\arctan(n)} < v_n < \frac{-n^2}{(1+(n+1)^2)\arctan(n+1)}$$

(\*)



و منه حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} = 0$$

من جهة أخرى نعلم أن :  $(\forall x \geq 0); \varphi(x) = x - F(x)$

لدينا  $\alpha_n \geq 0$  إذن  $\varphi(\alpha_n) = \alpha_n - F(\alpha_n)$

و نعلم كذلك أن :  $(\forall n \in \mathbb{N}); \varphi(\alpha_n) = n$

إذن :  $F(\alpha_n) = \alpha_n - n$  يعني  $n = \alpha_n - F(\alpha_n)$

$$\frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} = \frac{\alpha_n - n}{\alpha_n} = 1 - \frac{n}{\alpha_n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{n}{\alpha_n}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{\alpha_n}\right) = 1 \text{ يعني } 0 = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{\alpha_n}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\alpha_n}{n}\right) = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{\alpha_n}\right)} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\alpha_n}{n}\right) = 1$$

التمرين الخامس

1

ليكن  $n$  عددا صحيحا طبيعيا بحيث :  $n \geq 1$

$$v_n = \ln(u_n) = \ln\left(\left(\frac{\arctan(n)}{\arctan(n+1)}\right)^{n^2}\right) = n^2 \ln\left(\frac{\arctan(n)}{\arctan(n+1)}\right) = n^2 [\ln(\arctan(n)) - \ln(\arctan(n+1))]$$

2

نعتبر  $f$  المعرفة على  $]0; +\infty[$  بما يلي :  $f(x) = \ln(\arctan(x))$

لدينا حسب الخاصيات العامة لاتصال مركب دالتين أن الدالة  $f$  متصلة

على  $]0; +\infty[$  و كذلك  $f$  قابلة للاشتقاق على المجال  $]0; +\infty[$

لأن دالة  $\ln$  قابلة للاشتقاق على  $]0; +\infty[$  و دالة  $\arctan$  دالة قابلة

للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و  $]0; +\infty[ \subset \mathbb{R}$ .

إذن بإمكاننا تطبيق مبرهنة التزايديات المنتهية على الدالة  $f$  في أي مجال

محدود و يوجد ضمن  $]0; +\infty[$

ليكن  $n \geq 1$  و نختار المجال  $]n; n+1[$ .

إذن يوجد عدد حقيقي  $c$  من المجال  $]n; n+1[$  بحيث :

$$(**) \frac{f(n+1) - f(n)}{(n+1) - n} = f'(c)$$

لدينا :  $(\forall x \in ]0; +\infty[); f(x) = \ln(\arctan(x))$

إذن :

$$f'(x) = \frac{(\arctan(x))'}{\arctan(x)} = \frac{\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}{\arctan(x)} = \frac{1}{(1+x^2) \arctan(x)}$$



4

في البداية أذكركم بالنهايتين المهمتين التاليتين :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$$

لدينا :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2}{(1 + (n + 1)^2) \arctan(n + 1)}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{-n^2}{n^2 + 2n + 2} \right) \left( \frac{1}{\arctan(n + 1)} \right)$$

$$= (-1) \left( \frac{1}{\frac{\pi}{2}} \right) = -\frac{2}{\pi}$$

و لدينا كذلك :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2}{(1 + n^2) \arctan(n)}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{-n^2}{n^2 + 1} \right) \left( \frac{1}{\arctan(n + 1)} \right)$$

$$= (-1) \left( \frac{1}{\frac{\pi}{2}} \right) = -\frac{2}{\pi}$$

إذن التأطير (⊗) يُصبح :

$$\left( \frac{-n^2}{(1 + n^2) \arctan(n)} \right) < v_n < \left( \frac{-n^2}{(1 + (n + 1)^2) \arctan(n + 1)} \right)$$

$\swarrow \quad \searrow$   
 $n \rightarrow \infty \quad \quad \quad n \rightarrow \infty$   
 $\frac{-2}{\pi} \quad \quad \quad \frac{-2}{\pi}$

إذن حسب مصاديق تقارب المتتاليات نجد :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) = \frac{-2}{\pi}$

و لدينا  $v_n = \ln(u_n)$  إذن :  $u_n = e^{v_n}$

ومنه :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{v_n} = e^{\left( \lim_{n \rightarrow \infty} v_n \right)} = e^{\left( \frac{-2}{\pi} \right)}$

و بالتالي :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = e^{\left( \frac{-2}{\pi} \right)}$

■ و الحمد لله رب العالمين ■