المملكة المغربية

وزارة التربية الوطنية و التعليم العالي وتكوين الأطر والبحث العلمي
المركز الوطني للتقويم و الإمتحانات

الإمتحان الوطني الموحد
لنيل شهادة البكالوريا
الدورة الاستدراكية 2011

مادة الرياضيات
مسلك العلوم الرياضية أ و ب
المعامل 9
مدة الإنجاز : أربع ساعات

استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (3,5 ن)

لكل x و y من المجال $I =]0,1[$ نضع : $x * y = \dfrac{xy}{xy + (1-x)(1-y)}$

① أ) بين أن $(*)$ قانون تركيب داخلي في I . (0,50 ن)

ب) بين أن القانون $(*)$ تبادلي و تجميعي . (0,50 ن)

ج) بين أن $(I,*)$ يقبل عنصرا محايدا ينبغي تحديده. (0,50 ن)

② بين أن $(I,*)$ زمرة تبادلية. (0,50 ن)

③ نعتبر المجموعتين : $\mathbb{H} = \{\ 2^n \ / \ n \epsilon \mathbb{Z}\ \}$ و $\mathbb{K} = \left\{ \dfrac{1}{2^n + 1} \ / \ n \epsilon \mathbb{Z} \right\}$

أ) بين أن $\mathbb{H}$ زمرة جزئية للزمرة $\left(\mathbb{R}_+^*, \times\right)$. (0,50 ن)

ب) نعتبر التطبيق φ المعرف بما يلي : (0,50 ن)

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{H} &\longrightarrow I \\ x &\longrightarrow \frac{1}{x+1} \end{aligned}$$

بين أن التطبيق φ تشاكل من $(\mathbb{H}, \times)$ إلى $(I, *)$

ج) استنتج أن $(\mathbb{K}, *)$ زمرة جزئية للزمرة $(I,*)$. (0,50 ن)

التمرين الثاني : (2,5 ن)

ليكن x عددا صحيحا طبيعيا يحقق $10^x \equiv 2[19]$.

① أ) تحقق أن : $10^{x+1} \equiv 1[19]$. (0,25 ن)

ب) بين أن : $10^{18} \equiv 1[19]$. (0,50 ن)

② ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين 18 و $(x+1)$.

أ) بين أن : $10^d \equiv 1[19]$. (0,75 ن)

ب) بين أن : $d \equiv 18$. (0,50 ن)

ج) استنتج أن : $x \equiv 17[18]$. (0,50 ن)

التمرين الثالث : (4,0 ن)

(I) نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية :

$$(E) : \ z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i) = 0$$

① بين أن العدد $-2i$ حل للمعادلة (E) . (0,50 ن)

② حدد العددين العقديين α و β بحيث : (0,50 ن)

$$(\forall z \epsilon \mathbb{C}) : \ z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i) = (z+2i)(z^2 + \alpha z + \beta)$$

③ أ) حدد الجذرين المربعين للعدد $(5 - 12i)$. (0,50 ن)

ب) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) . (0,50 ن)

(II) المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(\mathcal{O},\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي : $a=-1+3i$ و $b=-2i$ و $c=2+i$.

0,50 ن ① بين أن ABC قائم الزاوية ومتساوي الساقين في النقطة C.

② نعتبر الدوران $\mathcal{R}_1$ الذي مركزه B و زاويته $\frac{\pi}{3}$ و الدوران $\mathcal{R}_2$ الذي مركزه A و زاويته $\frac{-2\pi}{3}$.

لتكن M نقطة من المستوى العقدي لحقها z و M_1 صورتها بالدوران $\mathcal{R}_1$ و M_2 صورتها بالدوران $\mathcal{R}_2$.

0,50 ن ⓐ تحقق أن الصيغة العقدية للدوران $\mathcal{R}_1$ هي : $z_1=\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)z-\sqrt{3}-i$

0,50 ن ⓑ حدد z_2 لحق M_2 بدلالة z .

0,50 ن ⓒ استنتج أن النقطة I منتصف القطعة $[M_1M_2]$ **نقطة ثابتة .**

التمرين الرابع : (6,0 ن)

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي : $\boxed{f(x)=x+\ln x}$.

و ليكن $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(\mathcal{O},\vec{\imath},\vec{\jmath})(\|\vec{\imath}\|=\|\vec{\jmath}\|=1\text{cm})$

1,00 ن ① أحسب النهايات التالية: $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ و $\lim_{x\to0^-}f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)$

0,50 ن ② ⓐ ضع جدول تغيرات الدالة f .

0,75 ن ⓑ بين أن الدالة f تقابل من المجال $]0,+\infty[$ نحو مجال J يتم تحديده ثم ضع جدول تغيرات التقابل العكسي f^{-1} .

0,50 ن ③ أحسب : $f(1)$ و $f(e)$ ثم أنشىء $(\mathscr{C})$ و $(\overset{-1}{\mathscr{C}})$ منحنى الدالة f^{-1} في نفس المعلم $(\mathcal{O},\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

0,50 ن ④ ⓐ أحسب التكامل : $\int_1^{e+1}f^{-1}(x)\mathrm{d}x$ (يمكن أن تضع $t=f^{-1}(x)$)

0,50 ن ⓑ استنتج مساحة حيز المستوى المحصور بين $(\overset{-1}{\mathscr{C}})$ و المستقيمات : $x=1$ و $x=e+1$ و $y=x$.

⑤ نعتبر المعادلة : $x+\ln x=n$: (E_n) .

0,25 ن ⓐ بين أن المعادلة (E_n) تقبل حلا وحيدا x_n .

0,50 ن ⓑ حدد قيمة x_1 ثم بين أن : $\lim_{n\to+\infty}x_n=+\infty$

0,50 ن ⑥ ⓐ بين أن $f(x_n)\le f(n)$; $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)$ ثم استنتج أن $x_n\le n$: $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)$.

0,50 ن ⓑ بين أن $n-\ln n\le x_n$; $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)$.

0,50 ن ⓒ أحسب النهايتين التاليتين: $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{x_n-n}{n}\right)$ و $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{x_n}{n-\ln n}\right)$

التمرين الخامس : (4,5 ن)

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم و f_n الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$f_n(x) = -1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n}$$

0,50 ن | ① بين أنه من أجل $n \geq 2$ يوجد عدد حقيقي و حيد α_n من المجال $]0,1[$ بحيث : $f_n(\alpha_n) = 0$.

0,75 ن | ② بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ تناقصية قطعا ثم استنتج أنها متقاربة (نضع : $\ell = \lim_{+\infty}(\alpha_n)$)

0,50 ن | ③ⓐ تحقق أنه من أجل $t \neq 1$ لدينا : $1 + t + t^2 + \cdots + t^{n-1} = \frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t}$

0,50 ن | ⓑ استنتج أن : $\alpha_n + \frac{(\alpha_n)^2}{2} + \frac{(\alpha_n)^3}{3} + \cdots + \frac{(\alpha_n)^n}{n} = -\ln(1-\alpha_n) - \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t}dt$

0,50 ن | ④ⓐ بين أن : $1 + \ln(1-\alpha_n) = -\int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t}dt$

0,50 ن | ⓑ بين أن : $0 \leq \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t}dt \leq \frac{1}{(n+1)(1-\alpha_n)} \quad : \quad (\forall n \geq 2)$

0,50 ن | ⓒ استنتج أن : $\boxed{\ell = 1 - e^{-1}}$