مادة الرياضيات مسلك العلوم الرياضية أ و ب المعامل 9 مدة الإنجاز : أربع ساعات	المملكة المغربية وزارة التربية الوطنية و التعليم العالي وتكوين الأطر والبحث العلمي المركز الوطني للتقويم والإمتحانات	الإمتحان الوطني الموحد لنيل شهادة البكالوريا الدورة العادية 2011

استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (4,0 ن)

الجزءان الأول و الثاني مستقلان

(I) في الحلقة الواحدية $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ نعتبر المصفوفتين $\mathbb{A}$ و $\mathbb{I}$ المعرفتين بما يلي :

$$\mathbb{A}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \mathbb{I}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

نضع : $\mathbb{A}^0=\mathbb{I}$ و $\mathbb{A}^1=\mathbb{A}$ و $\mathbb{A}^2=\mathbb{A}\times\mathbb{A}$ و $\forall n\in\mathbb{N}:\ \mathbb{A}^{n+1}=\mathbb{A}^n\times\mathbb{A}$

0,50 ن — ① بين أن : $\forall k\in\mathbb{N}:\ \mathbb{A}^{2k}=\mathbb{I}$

0,50 ن — ② بين أن المصفوفة $\mathbb{A}$ تقبل مقلوبا $\mathbb{A}^{-1}$ ينبغي تحديده.

ليكن α عددا حقيقيا موجبا قطعا .

لكل x و y من المجال $I=]\alpha,+\infty[$ نضع : $x*y=(x-\alpha)(y-\alpha)+\alpha$

0,50 ن — ① أ) بين أن : $*$ قانون تركيب داخلي في I

0,50 ن — ب) بين أن القانون $*$ تبادلي و تجميعي

0,50 ن — ج) بين أن المجموعة $(I,*)$ تقبل عنصرا محايدا يتم تحديده

0,50 ن — ② بين أن المجموعة $(I,*)$ زمرة تبادلية

③ نعتبر التطبيق :

$$\varphi:\ I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*,\qquad x \longmapsto \frac{1}{x-\alpha}$$

0,50 ن — أ) بين أن التطبيق φ تشاكل تقابلي من $(I,*)$ إلى $(\mathbb{R}_+^*,\times)$.

0,50 ن — ب) حل في المجموعة I المعادلة : $x^{(3)}=\alpha^3+\alpha$ بحيث : $x^{(3)}=x*x*x$

التمرين الثاني : (2,5 ن)

ليكن N العدد الصحيح الطبيعي الممثل في نظمة العد العشري بما يلي : $N=\underbrace{111\ldots11}_{\text{2010 مرة 1}}$

0,25 ن — ① بين أن N يقبل القسمة على العدد 11

0,75 ن — ② أ) تحقق أن العدد 2011 أولي , و أن : $10^{2010}-1=9N$

0,50 ن — ب) بين أن العدد 2011 يقسم العدد $9N$

0,50 ن — ج) استنتج أن العدد 2011 يقسم العدد N .

0,50 ن — ③ بين أن العدد N يقبل القسمة على العدد 22121 .

التمرين الثالث : (3,5 ن) الجزءان الأول و الثاني مستقلان

(I) ليكن m عددا عقديا غير منعدم . نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z :

$$(E_m):\ z^2+[(1-i)m-4]z-im^2-2(1-i)m+4=0$$

① تحقق أن العدد $z_1=2-m$ حل للمعادلة (E_m) . — 0,50 ن

② ليكن z_2 الحل الثاني للمعادلة (E_m) .

Ⓐ بين أن $z_1z_2=1 \quad\Leftrightarrow\quad im^2+2(1-i)-3=0$ — 0,50 ن

Ⓑ حدد قيمتي m بحيث $z_1z_2=1$ — 1,00 ن

(II) المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(\mathcal{O},\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر التطبيق $\mathcal{S}$ الذي يربط النقطة M التي لحقها z بالنقطة M' التي لحقها z' بحيث : $z'=-(z-1)+1$

و الدوران $\mathcal{R}$ الذي مركزه النقطة Ω ذات اللحق $(1+i)$ و قياس زاويته $\frac{\pi}{2}$ و ليكن z'' لحق النقطة M'' صورة M بالدوران $\mathcal{R}$.

①Ⓐ بين أن التطبيق $\mathcal{S}$ هو التماثل المركزي الذي مركزه النقطة ذات اللحق 1 — 0,25 ن

Ⓑ بين أن : $z''=iz+2$. — 0,25 ن

② نفترض أن النقطة M تخالف O أصل المعلم و لتكن A النقطة التي لحقها 2

Ⓐ أحسب $\frac{z''-2}{z'-2}$ ثم استنتج طبيعة المثلث $AM'M''$ — 0,50 ن

Ⓑ حدد مجموعة النقط M بحيث تكون النقط A و Ω و M' و M'' متداورة. — 0,50 ن

التمرين الرابع : (6,5 ن)

(I) دراسة الحلول الموجبة للمعادلة $(E):\ e^x=x^n$ بحيث $n\in\mathbb{N}^*$.

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجموعة : $\mathcal{D}=[0,1[\cup]1,+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{\ln x}\ ;x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

و ليكن $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(\mathcal{O},\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

① تحقق أنه لكل x من المجموعة $]0,1[\cup]1,+\infty[$ لدينا : $(e^x=x^n \Leftrightarrow n=f(x))$. — 0,25 ن

② بين أن الدالة f قابلة للإشتقاق على اليمين في 0. — 0,50 ن

③ أحسب النهايات التالية ثم أوّل هندسيا النتائج المحصل عليها : — 1,50 ن

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} \text{ و } \lim_{x\to+\infty}f(x) \text{ و } \lim_{x\to1^+}f(x) \text{ و } \lim_{x\to1^-}f(x)$$

④ أدرس تغيرات الدالة f على كل من المجالين $]0,1[$ و $]1,+\infty[$ ثم إعط جدول تغيراتها. — 0,75 ن

⑤ بين أن $(\mathscr{C})$ يقبل نقطة انعطاف يتم تحديد زوج احداثيتيها. — 0,50 ن

⑥ أنشئ المنحنى $(\mathscr{C})$ — 0,50 ن

⑦ بين أنه إذا كان $n\geq 3$ فإن المعادلة (E) تقبل بالضبط حلين اثنين α_n و b_n بحيث $1<\alpha_n<e<b_n$. — 0,50 ن

(II) دراسة تقارب المتتاليتين $(\alpha_n)_{n\geq 3}$ و $(b_n)_{n\geq 3}$.

0,50 ن — ① بين أن $(\forall n \geq 3):\ b_n \geq n$ ثم استنتج نهاية المتتالية $(b_n)_{n\geq 3}$

0,50 ن — ② (أ) بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq 3}$ تناقصية ثم استنتج أنها متقاربة .

0,50 ن — (ب) بين أن $(\forall n \geq 3):\ \frac{1}{n} < ln(\alpha_n) < \frac{e}{n}$ ثم استنتج نهاية المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq 3}$.

0,50 ن — (ج) بين أن : $\lim\limits_{n\to+\infty} (\alpha_n)^n = e$

التمرين الخامس: (3,5 ن)

نعتبر الدالة العددية F المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$F(x) = e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$$

0,50 ن — ① (أ) بين أن : $(\forall x \geq 0):\ 0 \leq F(x) \leq xe^{-x^2}$.

0,50 ن — (ب) بين أن : $(\forall x \geq 1):\ e^{-x^2} \leq e^{-x}$ ثم استنتج نهاية الدالة F عند $+\infty$.

0,50 ن — ② بين أن : F قابلة للإشتقاق على $[0,+\infty[$ و أن : $(\forall x \geq 0):\ F'(x) = e^{-2x^2} - 2xF(x)$.

③ نعتبر الدالة العددية G المعرفة على $[0,\frac{\pi}{2}]$ بما يلي :

$$\begin{cases} G(x) = F(\tan x) \\ G\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

0,25 ن — (أ) بين أن الدالة G متصلة على اليسار في $\frac{\pi}{2}$.

0,75 ن — (ب) بين أنه يوجد عدد حقيقي c ينتمي إلى المجال $]0,+\infty[$ بحيث : $F'(c) = 0$ و أن $F(c) = \frac{1}{2c}e^{-2c^2}$.

(يمكن تطبيق مبرهنة رول بالنسبة للدالة G على المجال $[0,\frac{\pi}{2}]$)

④ نعتبر الدالة العددية H المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $H(x) = F'(x)\dfrac{e^{x^2}}{2x}$

0,50 ن — (أ) بين أن الدالة H تناقصية قطعا على المجال $]0;+\infty[$.

0,50 ن — (ب) استنتج أن العدد c وحيد ثم إعط جدول تغيرات الدالة F .