

تقديم: ذ. العربي الوظيفي

ثانوية ابن تومرت مراكش

التمرين 1:

1. نبين أن E جزء مستقر في $(M_3(R), \times)$.ليكن M و N عنصرين من E ،إذن يوجد عدنان حقيقيان x و y حيث $M = M(x)$ و $N = M(y)$.

$$M(x) \times M(y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ x^2 & 2x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y & 1 & 0 \\ y^2 & 2y & 1 \end{pmatrix} : \text{لدينا}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x+y & 1 & 0 \\ (x+y)^2 & 2(x+y) & 1 \end{pmatrix}$$

$$= M(x+y)$$

إذن لكل M و N من E : $M \times N \in E$

ومنه

 E جزء مستقر في $(M_3(R), \times)$.2.أ. نبين أن φ تشاكل تقابلي من $(R, +)$ نحو (E, \times) .ليكن x و y من R . لدينا :

$$\varphi(x+y) = M(x+y) = M(x) \times M(y) = \varphi(x) \times \varphi(y)$$

إذن لكل x و y من R لدينا : $\varphi(x+y) = \varphi(x) \times \varphi(y)$.ومنه : φ تشاكل من $(R, +)$ نحو (E, \times) .لكل عنصر M من E يوجد عدد حقيقي x حيث $M = M(x)$ وذلك حسب تعريف M .ومنه φ تطبيق شمولي من R نحو E .ليكن x و y من R ، لدينا

$$\varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow M(x) = M(y)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 = y^2 \\ 2x = 2y \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = y$$

إذن لكل x و y من R حيث $\varphi(x) = \varphi(y)$ لدينا $x = y$.ومنه φ تطبيق تبايني من R نحو E .وعليه فإن φ تشاكل تقابلي من $(R, +)$ نحو (E, \times) .2.ب. نستنتج أن (E, \times) زمرة تبادلية :نعلم أن $(R, +)$ زمرة تبادلية وحيث أن φ تشاكل تقابلي من $(R, +)$ نحو (E, \times) فإن (E, \times) زمرة تبادلية .2.ج. نحدد مقلوب المصفوفة $M(x)$ حيث x من R :ليكن x عددا حقيقيا . مماثل x في $(R, +)$ هو $(-x)$.

http://www.vrac-colorpages.net

بما أن φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}, +)$ نحو (E, \times) فإن مماثل $\varphi(x)$ في (E, \times) هو $\varphi(-x)$.
ومنه

$$\text{مقلوب المصفوفة } M(x) \text{ هو المصفوفة } M(-x).$$

2. د. نحل في المجموعة E المعادلة $A^5 \cdot X = B$ حيث $A = M(2)$ و $B = M(12)$ و $A^5 = A \times A \times A \times A \times A$:

ليكن X عنصرا من E .
إذن $X = M(x)$ حيث x عنصر من \mathbb{R} .
بما أن φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}, +)$ نحو (E, \times) فإن φ^{-1} تشاكل تقابلي من (E, \times) نحو $(\mathbb{R}, +)$.
ولدينا لكل x من \mathbb{R} : $\varphi^{-1}(M(x)) = x$. إذن:

ومنه :

$$S = \{M(2)\}$$

3. بين أن المجموعة $F = \{M(\ln x) / x \in \mathbb{R}_+^*\}$ زمرة جزئية للزمرة $(E, +)$.

.العنصر المحايد في $(\mathbb{R}, +)$ هو العدد الحقيقي 0.

بما أن φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}, +)$ نحو (E, \times) فإن العنصر المحايد في (E, \times) هو $\varphi(0)$ أي المصفوفة $M(0)$.
ولدينا $M(0) = M(\ln 1)$ والعدد 1 عنصر من \mathbb{R}_+^* إذن $M(0) \in F$ إذن F غير فارغة.
ليكن a و b عنصريين من F .

إذن: $a = M(\ln x)$ و $b = M(\ln y)$ حيث x و y عنصران من $]0; +\infty[$.
مقلوب المصفوفة b هو المصفوفة $b^{-1} = M(-\ln y)$.

$$\text{لدينا : } a \times b^{-1} = M(\ln x) \times M(-\ln y) = M(\ln x - \ln y) = M\left(\ln \frac{x}{y}\right)$$

وحيث أن $\frac{x}{y}$ عنصر من $]0; +\infty[$ فإن $M\left(\ln \frac{x}{y}\right)$ عنصر من F .

وعليه فإن

$$F \text{ زمرة جزئية للزمرة } (E, +).$$



http://www.vrac-coloriages.net

التمرين 2:

1. أ. نتحقق أن العدد العقدي $a = 1 + i(2 - \sqrt{3})$ حل للمعادلة $z^2 - 4iz - 2 + 2i\sqrt{3} = 0$:

تعويض ثم تبسيط ...

1. ب. نستنتج الحل الثاني b للمعادلة (E) :

نعلم أن مجموع الحلين هو : $a + b = 4i$. إذن : $b = 4i - a$
ومنه

$$\text{الحل الثاني هو } b = -1 + i(2 + \sqrt{3}).$$

2. أ. نبين أن $a^2 = 4(2 - \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{6}}$:

$$\text{لدينا : } a^2 = (1 + i(2 - \sqrt{3}))^2 = -6 + 4\sqrt{3} + 4i - 2i\sqrt{3} = 4(2 - \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{6}}$$

ومنه

$$a^2 = 4(2 - \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{6}}$$

2. ب. لنستنتج شكلا مثلثيا للعدد a :

لدينا $a^2 = 4(2 - \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{6}}$ إذن : العدد a جذر مربع للعدد $4(2 - \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{6}}$.

ومنه : $a = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{12}}$ أو $a = -2\sqrt{2 - \sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{12}}$

وحيث أن الجزئين الحقيقي والتخيلي للعدد a موجبان فإن $a = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{12}}$.

3. أ. لنحدد لحق مركز الدائرة :

$[AB]$ قطر في الدائرة (Γ) . إذن لحق مركز الدائرة (Γ) هو $\omega = \frac{a+b}{2}$

ومنه

لحق مركز الدائرة هو $\omega = 2i$.

3. ب. بين أن O و C نقطتان من (Γ) :

شعاع الدائرة (Γ) هو $R = \frac{|b-a|}{2} = \frac{|2-2i\sqrt{3}|}{2} = 2$

بما أن $C \in (\Gamma)$ فإن $\Omega C = |c-2i| = \left| 2e^{i\frac{\pi}{7}} \right| = 2$

بما أن $O \in (\Gamma)$ فإن $\Omega O = |\omega| = |2i| = 2$

3. ج. نبين أن العدد العقدي $\frac{c-a}{c-b}$ تخيلي صرف :

بما أن C تنتمي إلى الدائرة التي أحد أقطارها $[AB]$ وتخالف النقطتين A و B فإن المثلث ABC قائم الزاوية في C ومنه قياس للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ هو عمدة لعدد عقدي تخيلي صرف .

وعليه فإن العدد العقدي $\frac{c-a}{c-b}$ تخيلي صرف .

التمرين 3:

أ. نحدد قيم X :

نسحب عشوائيا الكرات واحدة تلو الأخرى ونقف حالما تظهر أول كرة بيضاء .
ليكن X عدد الكرات المسحوبة . قيم X هي : 1 ، 2 و 3 .

ب. نحسب احتمال $p(X=1)$:

الحدث $(X=1)$ هو الحصول على كرة بيضاء في المرة الأولى :

$$p(X=1) = \frac{\text{card}(X=1)}{\text{card}\Omega} = \frac{A_{10}^1}{A_{12}^1} = \frac{5}{6}$$

ج. نبين أن $p(X=2) = \frac{5}{33}$:

الحدث $(X=2)$ هو الحصول على كرة حمراء في المرة الأولى وكرة بيضاء في المرة الثانية:

$$p(X=2) = \frac{\text{card}(X=2)}{\text{card}\Omega} = \frac{A_2^1 A_{10}^1}{A_{12}^2} = \frac{5}{33}$$

1. د. نحسب احتمال الحدث $(X=3)$:

الحدث $(X=3)$ هو الحصول على كرة حمراء في المرة الأولى والثانية وكرة بيضاء في المرة الثالثة:

$$p(X=3) = \frac{\text{card}(X=3)}{\text{card}\Omega} = \frac{A_2^2 A_{10}^1}{A_{12}^3} = \frac{2 \times 10}{12 \times 11 \times 10} = \frac{1}{66}$$



$$2. \text{ أنبين أن } E(X) = \frac{13}{11}$$

قانون احتمال X هو :

x_i	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{33}$	$\frac{1}{66}$

$$E(X) = 1 \cdot \frac{5}{6} + 2 \cdot \frac{5}{33} + 3 \cdot \frac{1}{66} \text{ : إذن : الأمل الرياضي للمتغير العشوائي } X \text{ هو :}$$

ومنه

$$E(X) = \frac{13}{11} \text{ : الأمل الرياضي للمتغير العشوائي } X \text{ هو :}$$

2. ب. نحدد $E(X^2)$ ثم نحسب $V(X)$:

$$E(X^2) = 1^2 \cdot \frac{5}{6} + 2^2 \cdot \frac{5}{33} + 3^2 \cdot \frac{1}{66} = \frac{52}{33}$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \text{ نعلم أن}$$

$$V(X) = \frac{52}{33} - \left(\frac{13}{11}\right)^2 = \frac{65}{363} \text{ إذن}$$

ومنه :

$$V(X) = \frac{65}{363} \quad \text{و} \quad E(X^2) = \frac{52}{11}$$

مسألة :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{1 - \ln(1-x)} & , \quad 0 \leq x < 1 \\ f(1) = 0 \end{cases} \text{ : نعتبر الدالة } f \text{ المعرفة على المجال } I = [0,1] \text{ بما يلي :}$$

الجزء 1 :

1. أنبين أن الدالة f متصلة على اليسار في 1 :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 - \ln X} \text{ : لدينا بوضع } X = 1 - x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 - \ln X} = 0 \text{ فإن } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln X = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(0) \text{ وبالتالي}$$

ومنه f متصلة على اليسار في 1 .

2. لندرس قابلية اشتقاق f على اليسار في 1 :

لدينا :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{(x-1)(1 - \ln(1-x))} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{-X(1 - \ln X)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{-X + X \ln X} \end{aligned}$$

$$(X = 1 - x)$$

وبما أن X يؤول إلى 0^+ فيمكن اعتبار X من $]0,1[$



وبالتالي: $-X + X \ln X < 0$ أي: $\lim_{X \rightarrow 0^+} -X + X \ln X = 0^-$

ومنه: $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -\infty$

وبالتالي f غير قابلة للاشتقاق على اليسار في 1.

3. ندرس تغيرات f على I :

الدالة f قابلة للاشتقاق على $[0,1[$ ولكل x من $[0,1[$ لدينا:

$$f'(x) = \frac{-(1 - \ln(1-x))^2}{(1 - \ln(1-x))^2} = \frac{-1}{(1-x)(1 - \ln(1-x))^2} < 0$$

ومنه f تناقصية قطعاً على $[0,1[$.

وحيث أن f متصلة على اليسار في 1 فإن f تناقصية قطعاً على $[0,1]$.

جدول تغيرات الدالة f هو:

x	0	1
$f'(x)$		+
f	1	0

4.أ- نبين أن لمنحنى f نقطة انعطاف وحيدة أفصولها $\frac{e-1}{e}$:

$$f''(x) = \frac{-(1 - \ln(1-x))^2 + 2(1-x)(1 - \ln(1-x)) \cdot \frac{1}{1-x}}{(1-x)^2(1 - \ln(1-x))^4} = \frac{(1 - \ln(1-x))(1 + \ln(1-x))}{(1-x)^2(1 - \ln(1-x))^4}$$

بما أن $1-x < 1$ فإن $\ln(1-x) < 0$ ومنه: $0 < 1 - \ln(1-x)$

وبالتالي إشارة $f''(x)$ هي إشارة $1 + \ln(1-x)$ ولدينا:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \ln(1-x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(1-x) = -1$$

$$\Leftrightarrow 1-x = \frac{1}{e}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{e-1}{e}$$

ولدينا:

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(1-x) > -1$$

$$\Leftrightarrow 1-x > \frac{1}{e}$$

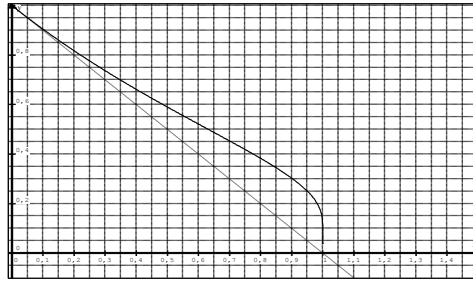
$$\Leftrightarrow x < \frac{e-1}{e}$$

المشتقة الثانية للدالة f تنعدم وتغير إشارتها عند $\frac{e-1}{e}$.

ومنه

منحنى f يقبل نقطة انعطاف وحيدة أفصولها $\frac{e-1}{e}$.

4.ب- إنشاء منحنى f :



5. نبين وجود عدد حقيقي وحيد α من I حيث $f(\alpha) = \alpha$.

نعتبر الدالة العددية φ المعرفة على I بما يلي : $\varphi(x) = f(x) - x$
 الدالتان : f و $x \mapsto -x$ تناقصيتان على I إذن φ تناقصية قطعا على I . (مجموع دالتين لهما نفس الرتبة على مجال)
 ولدينا : φ متصلة على I (مجموع دالتين متصلتين على مجال)
 ولدينا : $\varphi(0) \times \varphi(1) = -1 < 0$
 إذن : حسب مبرهنة القيم الوسطية المعادلة $\varphi(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $]0,1[$.
 ومنه

يوجد عنصر وحيد α في I حيث $f(\alpha) = \alpha$

6. نبين أن f تقابل من I نحو I :

بما أن f متصلة وتناقصية قطعا على المجال I
 فإن f تقابل من I نحو المجال $[f(1); f(0)] = [0; 1]$.

6. ب. لنحدد $f^{-1}(x)$ لكل x من I :

ليكن x و y عنصرين من I حيث $f^{-1}(x) = y$
 . إذا كان $x = 0$ فإن $y = 1$ لأن $f(1) = 0$
 نفترض أن $x \neq 0$ لدينا :

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1 - \ln(1 - y)} = x$$

$$\Leftrightarrow \ln(1 - y) = \frac{x - 1}{x}$$

$$\Leftrightarrow y = 1 - e^{\frac{x-1}{x}}$$

ومنه

$$\begin{cases} f^{-1}(x) = 1 - e^{\frac{x-1}{x}} & ; x \in]0; 1] \\ f^{-1}(0) = 1 \end{cases}$$

الجزء 2:

ليكن n من N ، لدينا : $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 t^{n+1} f(t) dt - \int_0^1 t^n f(t) dt = \int_0^1 t^n (t-1) f(t) dt$

وحيث أن $t \in [0; 1]$ فإن $t-1 \leq 0$ و بالتالي $t^n (t-1) f(t) \leq 0$ إذن $\int_0^1 t^n (t-1) f(t) dt \leq 0$

ومنه $I_{n+1} - I_n \leq 0$ لكل n من N .

وعليه فإن المتتالية (I_n) تناقصية.

لدينا $f(t) \geq 0$ لكل t من $[0; 1]$. إذن $I_n = \int_0^1 t^n f(t) dt \geq 0$ لكل n من N .



ومنه (I_n) مصغرة بالعدد 0.
بما أن (I_n) تناقصية ومصغرة فإنها متقاربة .

2. نبين أن $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ لكل n من N :

ليكن n من N ،

لدينا: $f(t) \leq 1$ لكل t من $[0; 1]$.

إن $t^n f(t) \leq t^n$ لكل t من $[0; 1]$.

ومنه : $0 \leq \int_0^1 t^n f(t) dt \leq \int_0^1 t^n dt$

وحيث أن $\int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$ فإن $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ لكل n من N .

نحدد نهاية المتتالية (I_n)

بما أن $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ لكل n من N و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ فإن $\lim I_n = 0$ (مبرهنة الدركي ... احتراماتي وتقديراتي !

.)

الجزء 3:

1. نبين أن $F(x) - S_n(x) = \int_0^x \frac{t^{n+1} f(t)}{1-t} dt$ لكل n من N و x من J :

ليكن n من N و x من $J =]0; 1[$. لدينا :

$$\begin{aligned} F(x) - S_n(x) &= \int_0^x \frac{f(t)}{1-t} dt - \sum_{k=0}^n F_k(x) \\ &= \int_0^x \frac{f(t)}{1-t} dt - \sum_{k=0}^n \int_0^x t^k f(t) dt \\ &= \int_0^x \frac{f(t)}{1-t} dt - \int_0^x \left(\sum_{k=0}^n t^k \right) f(t) dt \\ &= \int_0^x \frac{f(t)}{1-t} dt - \int_0^x \left(\frac{1-t^{n+1}}{1-t} \right) f(t) dt \\ &= \int_0^x \frac{f(t)}{1-t} dt - \left(\frac{1-t^{n+1}}{1-t} \right) f(t) dt \\ &= \int_0^x \frac{t^{n+1} f(t)}{1-t} dt \end{aligned}$$



<http://www.vrac-coloriages.net>



<http://www.vrac-coloriages.net>

ومنه :

$$F(x) - S_n(x) = \int_0^x \frac{t^{n+1} f(t)}{1-t} dt \text{ لكل } n \text{ من } N \text{ و } x \text{ من } J .$$

2أ. نبين أن الدالة $x \mapsto (1-x)(1-\ln(1-x))$ تناقصية قطعاً على المجال J :

الدالة $\varphi : x \mapsto (1-x)(1-\ln(1-x))$ قابلة للإشتقاق على J حسب العمليات على الدوال القابلة للإشتقاق على مجال

ولكل x من J لدينا : $\varphi'(x) = \ln(1-x)$

وحيث أن $x \in]0, 1[$ فإن $\varphi'(x) \leq 0$ أي أن φ تناقصية قطعاً على J .

2ب. نستنتج أن الدالة $f(t) \mapsto \frac{f(t)}{1-t}$ تزايدية قطعاً على $[0, x]$ حيث x عنصر من J .

ليكن x عنصراً من J .

$$\frac{f(t)}{1-t} = \frac{1}{(1-t)(1-\ln(1-t))} = \frac{1}{\varphi(t)}$$

لكل t من $[0, x]$ لدينا $\frac{1}{\varphi(t)}$ وحيث أن φ تناقصية قطعا على $[0, x]$ ولا تنعدم عليه فإن $\frac{1}{\varphi}$ تزايدية قطعا على $[0, x]$.

ومنه :

$$\text{الدالة } t \mapsto \frac{f(t)}{1-t} \text{ تزايدية قطعا على } [0, x] \text{ لكل } x \text{ عنصر من } J$$

$$3. \text{أ.بين أن } 0 \leq F(x) - S_n(x) \leq \frac{1}{1-x} \frac{1}{n+2} \text{ لكل } n \text{ من } N \text{ و } x \text{ من } J$$

ليكن n من N و x من J ،

$$\text{لدينا : } F(x) - S_n(x) = \int_0^x \frac{t^{n+1}f(t)}{1-t} dt$$

لكل t من $[0, x]$ لدينا $0 \leq \frac{f(t)}{1-t} \leq \frac{f(x)}{1-x}$ لأن الدالة $t \mapsto \frac{f(t)}{1-t}$ تزايدية قطعا على $[0, x]$.

ومنه $0 \leq \frac{t^{n+1}f(t)}{1-t} \leq \frac{t^{n+1}f(x)}{1-x}$ لكل t من $[0, x]$.

$$\text{وبالتالي : } 0 \leq \int_0^x \frac{t^{n+1}f(t)}{1-t} dt \leq \int_0^x \frac{t^{n+1}f(x)}{1-x} dt$$

$$\text{أي : } f(x) \leq 1 \text{ لأن } 0 \leq \int_0^x \frac{t^{n+1}f(t)}{1-t} dt \leq \frac{1}{1-x} \int_0^x t^{n+1} dt$$

$$\text{ولدينا } \int_0^x t^{n+1} dt = \left[\frac{t^{n+2}}{n+2} \right]_0^x = \frac{x^{n+2}}{n+2}$$

$$\text{وبما أن } x \in [0, 1[\text{ فإن } \frac{x^{n+2}}{n+2} < \frac{1}{n+2} \text{ ومنه } 0 \leq \int_0^x \frac{t^{n+1}f(t)}{1-t} dt \leq \frac{1}{1-x} \frac{1}{n+2}$$

وعليه فإن :

$$0 \leq F(x) - S_n(x) \leq \frac{1}{1-x} \frac{1}{n+2}$$

$$3. \text{ب. نستنتج أن لكل } x \text{ من } J \text{ لدينا : } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = F(x)$$

ليكن x من J ،

$$0 \leq F(x) - S_n(x) \leq \frac{1}{1-x} \frac{1}{n+2} \text{ لكل } n \text{ من } N \text{ لدينا}$$

$$\text{وحيث أن } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-x} \frac{1}{n+2} = 0 \text{ فإن } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = F(x)$$

ومنه :

$$\text{لكل } x \text{ من } J \text{ لدينا : } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = F(x)$$

$$4. \text{أ. نحدد } F(x) \text{ من أجل } x \in J$$

ليكن x من J ، لدينا :

$$F(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{1-t} dt = \int_0^x \frac{1}{(1-t)(1-\ln(1-t))} dt = \int_0^x \frac{(1-\ln(1-t))'}{(1-\ln(1-t))^2} dt = [\ln|1-\ln(1-t)|]_0^x = \ln(1-\ln(1-x))$$

ومنه :

$$\text{لكل } x \text{ من } J \text{ لدينا : } F(x) = \ln(1-\ln(1-x))$$



4.ب. نحدد النهاية $\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x)$:

لدينا $\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(1-x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln t = -\infty$ بوضع $t = 1-x$

ومنه:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = +\infty$$

وفقكم الله



<http://www.xrac-colorpages.net>

