مادة الرياضيات مسلك العلوم الرياضية أ و ب المعامل 10 مدة الإنجاز : أربع ساعات	المملكة المغربية وزارة التربية الوطنية و التعليم العالي وتكوين الأطر والبحث العلمي المركز الوطني للتقويم والامتحانات	الامتحان الوطني الموحد لنيل شهادة البكالوريا الدورة الاستدراكية 2007

استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (3,0 ن)

نعتبر في $\mathbb{Z}$ النظمة $(\mathcal{S})$ التالية : $\begin{cases} x \equiv a[p] \\ x \equiv b[q] \end{cases}$ بحيث : $\begin{cases} a,b,p,q \in \mathbb{Z} \\ p \wedge q = 1 \end{cases}$

0,50 ن ① (أ) بين أنه يوجد زوج (u_0, v_0) من $\mathbb{Z}^2$ بحيث : $pu_0 + qv_0 = 1$.

0,50 ن (ب) بين أن $x_0 = bpu_0 + aqv_0$ حل للنظمة $(\mathcal{S})$.

0,50 ن ② ليكن x حلا للنظمة $(\mathcal{S})$ ، بين أن العدد pq يقسم العدد $x - x_0$

0,50 ن ③ ليكن x عددا صحيحا نسبيا بحيث : pq يقسم العدد $x - x_0$. بين أن x حل للنظمة $(\mathcal{S})$.

0,50 ن ④ استنتج مجموعة حلول النظمة $(\mathcal{S})$.

0,50 ن ⑤ حل في $\mathbb{Z}$ النظمة التالية : $\begin{cases} x \equiv 1[8] \\ x \equiv 3[13] \end{cases}$

التمرين الثاني : (2,0 ن)

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا فرديا أكبر أو يساوي 3 . نتوفر على n صندوقا مرقما من 1 إلى n . الصندوق رقم k بحيث : $(1 \leq k \leq n)$ يحتوي على k كرة بيضاء و $(n-k)$ كرة سوداء.

نختار عشوائيا صندوقا من بين الصناديق ثم نسحب منه كرة واحدة .

0,50 ن ① أحسب احتمال الحصول على كرة بيضاء.

0,75 ن ② أحسب احتمال أن يتم السحب من صندوق رقمه فردي.

0,75 ن ③ أحسب احتمال الحصول على كرة بيضاء ، علما أن السحب تم من صندوق رقمه عدد فردي .

التمرين الثالث : (2,0 ن)

المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

نعتبر المجموعة : $(\mathcal{H}) = \{M(z) \in (P) / z^2 + \bar{z}^2 - |z|^2 = 1\}$

0,25 ن ① (أ) حدد معادلة ديكارتية للمجموعة $(\mathcal{H})$.

0,50 ن (ب) بين أن $(\mathcal{H})$ هذلول و حدد مركزه و رأسيه و مقاربيه في المعلم $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

0,25 ن (ج) أنشىء $(\mathcal{H})$.

② $M(a)$ و $M(b)$ نقطتان من $(\mathcal{H})$. نضع : $\varphi(a,b) = a\bar{b} + \bar{a}b - \overline{ab}$.

0,50 ن (أ) بين أن : $M(\varphi(a,b)) \in (\mathcal{H})$

0,50 ن (ب) تحقق أن $\varphi(a,1) = 1$ و أن $\varphi(a,\bar{a}) = 1$.

1,00 ن ③ نزود $(\mathcal{H})$ بقانون التركيب الداخلي $(*)$ حيث لكل $M(a)$ و $M(b)$ من $(\mathcal{H})$: $M(a) * M(b) = M(\varphi(a,b))$.

بين أن : $((\mathcal{H}), *)$ زمرة تبادلية .

التمرين الرابع : (3,0 ن)

$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2 . نذكر أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي .

نعتبر المجموعة التالية :
$$\boxed{\mathcal{F}=\left\{\mathcal{M}(a,b)=\begin{pmatrix} a+b & -b \\ 5b & a-3b\end{pmatrix} / (a,b)\epsilon\mathbb{R}^2\right\}}$$

و هي مزودة بجمع المصفوفات $(+)$ و ضرب مصفوفة في عدد حقيقي $(\cdot)$ و ضرب المصفوفات $(\times)$.

نضع : $I=\mathcal{M}(1,0)$ و $J=\mathcal{M}(0,1)$ و $O=\mathcal{M}(0,0)$

0,50 ن ① أ) بين أن : $(\mathcal{F},+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي .

0,50 ن ب) بين أن (I,J) أساس للفضاء المتجهي $(\mathcal{F},+,\ \cdot)$ و اعط بعده .

0,50 ن ② ليكن α عددا عقديا لا ينتمي إلى $\mathbb{R}$ ، بين أن الأسرة $(1,\alpha)$ أساس للفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathbb{C},+,\ \cdot)$.

③ نعتبر التطبيق ψ من $\mathbb{C}$ نحو $\mathcal{F}$ المعرف بما يلي : $\psi(z)=\mathcal{M}(m,n)$.

بحيث : $z=m+\alpha n$ و $m\epsilon\mathbb{R}$ و $n\epsilon\mathbb{R}$ و $z\epsilon\mathbb{C}$.

0,50 ن أ) تحقق أن $J^2=-2(I+J)$ و $\psi(\alpha)=J$

0,50 ن ب) حدد قيمتي α التي يكون من أجلها التطبيق ψ تشاكلا تقابليا من $(\mathbb{C},\times)$ نحو $(\mathcal{F},\times)$.

0,50 ن ④ نأخذ : $\alpha=-1+i$. أكتب في الأساس (I,J) المصفوفة J^{2007} .

التمرين الخامس : (9,0 ن)

(I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\boxed{g(x)=1+x-e^{-x}}$.

0,50 ن ① أ) أدرس تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$.

0,50 ن ب) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و ضع جدول تغيرات الدالة g .

0,50 ن ج) استنتج أن $x_0=0$ هو الحل الوحيد للمعادلة $g(x)=0$.

0,50 ن ② لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي :
$$\boxed{f(x)=\frac{1}{1+x-e^{-x}}}$$

$(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

0,50 ن أ) أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$

0,25 ن ب) أحسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}^*$.

0,50 ن ج) ضع جدول تغيرات الدالة f .

0,50 ن د) أنشئ $(\mathscr{C})$.

0,50 ن ③ أ) ليكن n من $\mathbb{N}^*$ ، بين أن المعادلة $f(x)=n$ تقبل حلا وحيدا x_n في المجال $]0,+\infty[$.

0,50 ن ب) بين أن المتتالية $(x_n)_{n\geq1}$ تناقصية و أنها متقاربة .

0,50 ن ج) أثبت أن : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=0$

0,25 ن (II)①(أ) بين أن المعادلة $f(x) = 1$ تكافئ المعادلة $e^x = x$

0,50 ن (ب) بين أن المعادلة $e^x = x$ تقبل حلا وحيدا هو $\alpha = x_1$ بحيث : $\frac{1}{e} \leq \alpha \leq 1$

② تعتبر المتتالية $(y_n)_{n\geq1}$ المعرفة بما يلي $y_1 = 1$ و $y_{n+1} = e^{-y_n}$: $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)$

0,50 ن (أ) بين أن لكل n من $\mathbb{N}^*$: $\frac{1}{e} \leq y_n \leq 1$

0,50 ن (ب) بين أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*) : |y_{n+1} - \alpha| \leq e^{-\left(\frac{1}{e}\right)}|y_n - \alpha|$

0,50 ن (ج) استنتج أن : $(y_n)_{n\geq1}$ متقاربة محددا نهايتها .

(III) لتكن $\mathcal{F}$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}_+$ بما يلي :

$$\mathcal{F}(0) = \frac{1}{2}\ln 2 \quad \text{و} \quad (\forall x > 0) : \mathcal{F}(x) = \int_x^{2x} f(t)dt$$

0,25 ن ① (أ) بين أن ——— $(\forall t > 0) : \frac{1}{1+t} < f(t) < \frac{1}{t}$

0,50 ن (ب) استنتج النهاية التالية : $\lim_{x\to+\infty} \mathcal{F}(x)$

0,50 ن ② (أ) بين أن : ——— $(\forall t \geq 0) : 1 - t \leq e^{-1} \leq 1 - t + \frac{t^2}{2}$

0,50 ن (ب) بين أن لكل t من المجال $]0,4[$: $\frac{1}{2t} \leq f(t) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{4-t}\right)$

0,25 ن (ج) استنتج أن $\mathcal{F}$ متصلة على اليمين في 0

0,50 ن ③ (أ) بين أن $\mathcal{F}$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ و أحسب $\mathcal{F}'(x)$ من أجل $x > 0$.

0,25 ن (ب) أدرس تغيرات الدالة $\mathcal{F}$ على $\mathbb{R}_+$.