المملكة المغربية

وزارة التربية الوطنية و التعليم العالي
وتكوين الأطر والبحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والإمتحانات

الإمتحان الوطني الموحد
لنيل شهادة البكالوريا
الدورة العادية 2006

مادة الرياضيات
مسلك العلوم الرياضية أ و ب
المعامل 10
مدة الإنجاز : أربع ساعات

استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (4,5 ن)

نذكر أن : $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية .

(I) لتكن G مجموعة المصفوفات من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ التي تكتب على الشكل :

$$\boxed{\mathrm{M}_{(a,\mathrm{b})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & \mathrm{b} \end{pmatrix} \quad ; \quad (a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*}$$

0,25 ن ① بين أن G جزء مستقر من : $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

0,75 ن ② بين أن $(G,\times)$ زمرة ، هل هي تبادلية ؟

0,50 ن ③ لتكن $\mathcal{H}$ مجموعة المصفوفات $M_{(a,b)}$ من G حيث $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ بين أن $\mathcal{H}$ زمرة جزئية للزمرة $(G,\times)$.

0,50 ن ④ ليكن A عنصرا من G حيث : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad a\in\mathbb{R}$

نضع $A^1 = A$ و $A^2 = A\times A$ و $A^{n+1} = A^n \times A$: $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$.

أحسب A^n بدلالة a و n بحيث : $(n\in\mathbb{N}^*)$.

(II) نعتبر في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ قانون التركيب الداخلي $\top$ المعرف بما يلي :

$$(a,b)\top(x,y) = (a+bx\,,by) \;:\; \forall(x,y);(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$$

ليكن φ التطبيق المعرف من G نحو $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ بما يلي : $\boxed{\forall(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^* \;:\; \varphi\big(M_{(a,b)}\big) = (a,b)}$

0,75 ن ① بين أن φ تشاكل تقابلي من $(G,\times)$ نحو $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*,\top)$.

0,25 ن ② استنتج بنية المجموعة : $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*,\top)$.

0,50 ن ③ حدد مماثل : $\underbrace{(a,1)\top(a,1)\top\cdots\top(a,1)}_{n \text{ مرة}}$ في $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*,\top)$ حيث $a\in\mathbb{R}$ و $n\in\mathbb{N}$ و $n\geq 2$.

التمرين الثاني : (2,5 ن)

نعتبر في $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ المعادلة : $\boxed{(E) : \; x^2(x+y) = y^2(x-y)^2}$.

① ليكن (x,y) حلا للمعادلة (E) .

نضع $d = x\wedge y$ و $x = ad$ و $y = bd$.

0,25 ن ⓐ تحقق أن $b^2(a-b)^2 = (a+b)a^2$.

0,75 ن ⓑ استنتج أن $b = 1$.

0,50 ن ⓒ بين أن $a \neq 1$ و $(a-1)$ يقسم $(a+1)$.

0,50 ن ⓓ استنتج أن $a = 2$ أو $a = 3$.

0,50 ن ② حل في $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ المعادلة (E) .

التمرين الثالث : (5,0 ن)

نضع $(\forall z\in\mathbb{C}) : P(z) = z^2 - (2+6i)z$.

(I) في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$ ، نعتبر $(\mathcal{H})$ مجموعة النقط M ذات اللحق z التي يكون من أجلها $P(z)$ عددا تخيليا صرفا .

0,50 ن — ① بين أن $x^2 - y^2 - 2x + 6y = 0$ معادلة ديكارتية للمجموعة $(\mathcal{H})$.

1,00 ن — ② بين أن $(\mathcal{H})$ هذلول و حدد مركزه و رأسيه و معادلتي مقاربيه في $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$.

0,50 ن — ③ تحقق أن النقطة O ، أصل المعلم ، تنتمي إلى المجموعة $(\mathcal{H})$ ثم أكتب في المعلم $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$ معادلة ديكارتية لمماس المنحنى $(\mathcal{H})$ في O .

0,75 ن — ④ أنشىء $(\mathcal{H})$ في المعلم $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$.

0,50 ن — (II)① حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z) = 4 - 6i$.

② نضع $u = 1+5i$ و $v = 1+i$ و $\omega = 239 - i$ و $\alpha = Arctan\left(\frac{1}{5}\right)$ و $\beta = Arctan\left(\frac{1}{239}\right)$.

0,50 ن — أ تحقق أن : $u^4 \times v = 4\omega$.

0,75 ن — ب حدد بدلالة α عمدة العدد العقدي u و حدد بدلالة β عمدة العدد العقدي ω .

0,50 ن — ج استنتج أن : $4Arctan\left(\frac{1}{5}\right) - Arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}$

التمرين الرابع : (9,0 ن)

الجزء الأول في هذا الجزء : $n\in\mathbb{N}$ بحيث $n \geq 3$.

نعتبر g_n الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بما يلي : $g_n(x) = nx + 2\ln x$

0,50 ن — ① ضع جدول تغيرات الدالة g_n .

0,50 ن — ② بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*) , \sqrt{x} > \ln x$.

0,75 ن — ③ أ بين أن المعادلة $g_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n في $\mathbb{R}_+^*$. و أن : $\frac{1}{n} < \alpha_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$

0,25 ن — ب استنتج : $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$

الجزء الثاني

(I) لتكن f الدالة العددية المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $f(x) = \sqrt[3]{x}e^{-x}$.

ليكن $(\mathscr{C})$ التمثيل المبياني للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ مع $(\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 3cm)$.

0,50 ن — ① أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في النقطة O ثم أول هندسيا النتيجة المحصل عليها .

0,50 ن — ② أحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم أول النتيجة هندسيا .

0,25 ن — ③ أ بين أن : $(\forall x\in]0,+\infty[) \; ; \; f'(x) = \left(\frac{1-3x}{3x}\right)f(x) \quad : \quad (*)$

0,25 ن — ب ضع جدول تغيرات الدالة f .

0,50 ن — ④ أنشىء $(\mathscr{C})$ نأخذ : $f\left(\frac{1}{3}\right) \approx 0,5$

(II) نضع : $I = \left[\frac{1}{3};1\right]$.

0,50 ن — ① أ) بين أن : $f(I) = I$.

0,50 ن — ب) باستعمال العلاقة $(*)$ ، بين أن : $(\forall x \epsilon I)\ ,|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$

0,50 ن — ج) بين أن : $\left[\left(f(x) = x \text{ و } x > 0\right) \Leftrightarrow x = \alpha_3\right]$

حيث α_3 هو حل المعادلة : $g_3(x) = 0$ الذي تم تعريفه في الجزء الأول.

② لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ المتتالية المعرفة بما يلي : $\boxed{u_0 = \frac{1}{3} \quad \text{و} \quad (\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ u_{n+1} = f(u_n)}$

0,25 ن — أ) بين أن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ u_n \epsilon I$

0,25 ن — ب) بين أن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ |u_{n+1} - \alpha_3| = \frac{2}{3}|u_n - \alpha_3|$

0,25 ن — ج) استنتج أن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ |u_n - \alpha_3| = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

0,50 ن — د) بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة محددا نهايتها .

(III) لتكن F الدالة العددية المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $\boxed{F(x) = \int_x^{8x} f(t)dt}$

0,25 ن — ① أ) بين أن : F قابلة للإشتقاق على $[0,+\infty[$.

0,75 ن — ب) أحسب $F'(x)$ لكل x من $[0,+\infty[$ ثم استنتج تغيرات الدالة F .

0,50 ن — ② أ) بين أن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R}^*)\ ,0 \leq F(x) \leq 2f(x)(1 - e^{-7x})$

0,25 ن — ب) استنتج : $\lim_{x \to +\infty} F(x)$

0,25 ن — ج) ضع جدول تغيرات الدالة F .