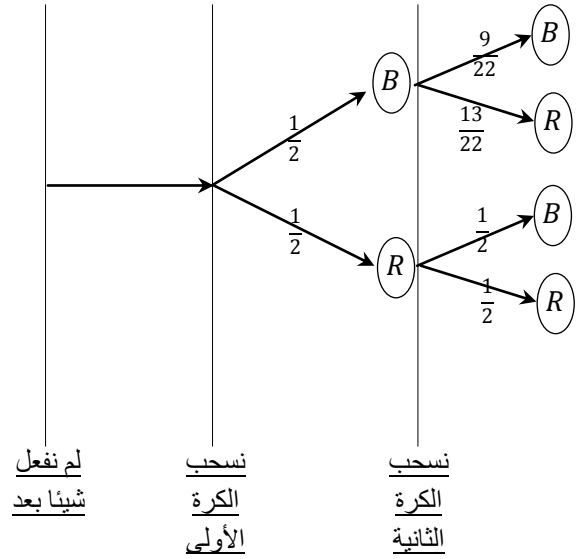


التمرين الأول : (2,5 ن)

1 ■

النموذج الأمثل لحل هذا التمرين هو شجرة الاحتمالات .  
من معطيات التجربة العشوائية نستنتج شجرة الاحتمالات التالية :



لدينا حسب الشجرة :  $P(R \cap R) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

2 ■

لدينا حسب الشجرة :  $P(B \cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{9}{22} = \frac{9}{44}$

3 ■

لدينا حسب الشجرة :

$$P(\text{لونين مختلفين}) = P(B \cap R) + P(R \cap B) \\ = \frac{1}{2} \times \frac{13}{22} + \frac{1}{2} \times \frac{9}{22} \\ = \frac{6}{11}$$

4 ■

نستعمل الاحتمال الشرطي التالي :

$$p_{B_2}(B_1) = \frac{p(B_1 \cap B_2)}{p(B_2)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{9}{22}}{\frac{1}{2} \times \frac{9}{22} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

التمرين الثاني : (3,0 ن)

1 ■

نلاحظ في البداية أن (1,1) حل خاص للمعادلة (E)

لأن :  $3 \times 1 - 2 \times 1 = 1$  (\*)

ليكن  $(x, y)$  الحل العام للمعادلة (E) .

إذن :  $3x - 2y = 1$  (\*\*)

ننجز عملية الفرق بين المتساويتين (\*) و (\*\*) نحصل على :

$$3(x - 1) - 2(y - 1) = 0$$

ومنه :  $3(x - 1) = 2(y - 1)$  إذن :  $3/2(y - 1)$   $\otimes$

و بما أن :  $3 \wedge 2 = 1$  فإنه حسب (Gauss) :  $3 / (y - 1)$

إذن :  $y = 3k + 1$  ;  $(\exists k \in \mathbb{Z})$

نعوض  $y$  بقيمته في المتساوية  $\otimes$  نحصل على :  $3(x - 1) = 2(3k + 1)$

يعني :  $x = 2k + 1$

عكسيا : لدينا  $3(2k + 1) - 2(3k + 1) = 1$

و بالتالي : مجموعة حلول المعادلة تكتب على الشكل :

$$S = \{(2k + 1; 3k + 1) / k \in \mathbb{Z}\}$$

2 ■ (i)

لدينا :

$$3(14n + 3) - 2(21n + 4) = 42n + 9 - 42n - 8 = 1$$

إذن  $(14n + 3; 21n + 4)$  حل للمعادلة (E) .

2 ■ (ب)

بما أن :  $3(14n + 3) - 2(21n + 4) = 1$

فإنه حسب (Bezout) :  $(14n + 3) \wedge (21n + 4) = 1$

3 ■ (i)

ليكن  $(21n + 4) \wedge (2n + 1) = d$

باستعمال خوارزمية إقليدس نحصل على :

$$\begin{array}{r|l} (21n + 4) & (2n + 1) \\ (n - 6) & 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} (2n + 1) & (n - 6) \\ 13 & 2 \end{array}$$

من هاتين الإقليديتين نستنتج أن :

$$(21n + 4) \wedge (2n + 1) = (2n + 1) \wedge (n - 6)$$

$$= (n - 6) \wedge 13$$

و لدينا :  $(21n + 4) \wedge (2n + 1)(14n + 3) = 1$

يعني :

$$(n - 1)(21n + 4) \wedge (n - 1)(2n + 1)(14n + 3) = (n - 1)$$

و منه :  $A \wedge B = (n - 1)$

خلاصة :

$$(\forall n \geq 2) ; A \wedge B = \begin{cases} 13(n - 1) ; & \text{si } n \equiv 6[13] \\ (n - 1) ; & \text{si } n \not\equiv 6[13] \end{cases}$$

التمرين الثالث : (4,0 ن)

■ (1) (أ)

نضع :  $z = x + iy$

ننطلق من الكتابة :  $z^2 - \bar{z}^2 = a^2 - \bar{a}^2$

$$\Leftrightarrow (z - \bar{z})(z + \bar{z}) = (a - \bar{a})(a + \bar{a})$$

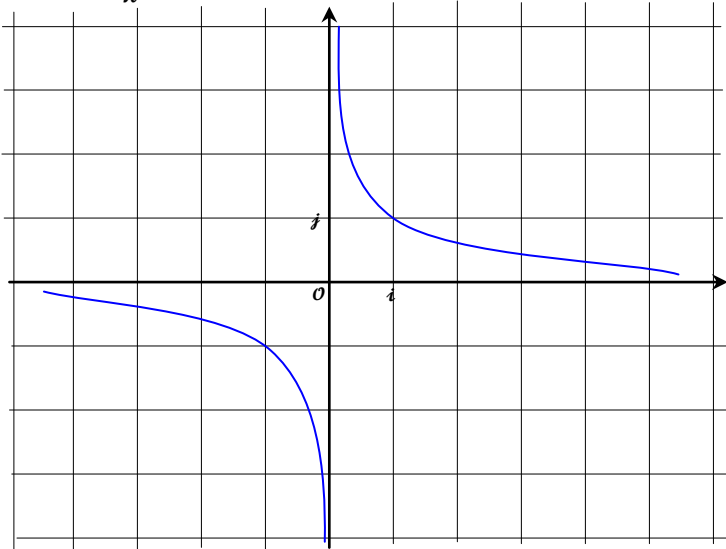
$$\Leftrightarrow (2iy)(2x) = (2i\beta)(2\alpha)$$

$$\Leftrightarrow xy = \alpha\beta$$

و منه المجموعة  $(\mathcal{H})$  هذلول معادلته :  $y = \frac{\alpha\beta}{x}$

■ (1) (ب)

في حالة  $a = (1 + i)$  لدينا  $(\mathcal{H})$  هذلول معادلته :  $y = \frac{1}{x}$



إذن :  $d = (n - 6) \wedge 13$  (\*)

و منه :  $d / 13$

و نعلم أن 13 عدد أولي إذن :  $d = 13$  أو  $d = 1$

■ (3) (ب)

إذا كان  $d = 13$  فإنه حسب (\*) :  $d / (n - 6)$

( لأن  $d$  قاسم مشترك لـ 13 و  $(n - 6)$  )

أي :  $13 / (n - 6)$  و منه :  $n \equiv 6[13]$

■ (4) (أ)

نضع :  $A = P(n) = 21n^2 - 17n - 4$

و :  $B = Q(n) = 28n^3 - 8n^2 - 17n - 3$

لدينا :  $P(1) = Q(1) = 0$

إذن : 1 جذر للحدوديتين  $P(n)$  و  $Q(n)$  في  $\mathbb{Z}$ .

و منه :  $P(n)$  و  $Q(n)$  تقبلان القسمة على :  $(n - 1)$

■ (4) (ب)

بالاستعانة بالقسمة الأقليدية نحصل على :

$$A = (n - 1)(21n + 4)$$

$$B = (n - 1)(28n^2 + 20n + 3)$$

بعد تعميل ثلاثية الحدود  $(28n^2 + 20n + 3)$  نحصل على :

$$B = (n - 1)(2n + 1)(14n + 3)$$

تذكير بخاصية مهمة :

$$c \wedge a = 1 \Rightarrow (\forall b \in \mathbb{Z}) ; a \wedge b = a \wedge (bc)$$

ليكن :  $(21n + 4) \wedge (2n + 1)(14n + 3) = d$

لدينا حسب السؤال (2) (ب)  $(14n + 3) \wedge (21n + 4) = 1$

إذن حسب الخاصية المذكورة :

$$(21n + 4) \wedge (2n + 1) = (21n + 4) \wedge (2n + 1)(14n + 3)$$

و منه :  $(21n + 4) \wedge (2n + 1) = d$

إذن حسب السؤال (3) (أ)  $d = 1$  أو  $d = 13$

الحالة الأولى : إذا كان  $d = 13$ .

إذن حسب السؤال (3) (ب) :  $n \equiv 6[13]$

و لدينا :  $(21n + 4) \wedge (2n + 1)(14n + 3) = 13$

يعني :

$$(n - 1)(21n + 4) \wedge (n - 1)(2n + 1)(14n + 3) = 13(n - 1)$$

و منه :  $A \wedge B = 13(n - 1)$

الحالة الثانية : إذا كان  $d = 1$  فإن :  $n \not\equiv 6[13]$

$$\bar{u} = \frac{4a\bar{a}}{u} \quad \text{لدينا حسب المعادلة الثانية :}$$

نعوض  $\bar{u}$  بقيمته في المعادلة الأولى نحصل على :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u(u+2a) = \frac{4a\bar{a}}{u} \left( \frac{4a\bar{a}}{u} + 2\bar{a} \right) \\ u\bar{u} = 4a\bar{a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + 2au - \left( \frac{4a\bar{a}}{u} \right)^2 - 2\bar{a} \left( \frac{4a\bar{a}}{u} \right) = 0 \\ u\bar{u} = 4a\bar{a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^4 + 2au^3 - 16a^2\bar{a}^2 - 8a\bar{a}^2u = 0 \\ u\bar{u} = 4a\bar{a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (u^4 - 8a\bar{a}^2u) + (2au^3 - 16a^2\bar{a}^2) = 0 \\ u\bar{u} = 4a\bar{a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u(u^3 - 8a\bar{a}^2) + 2a(u^3 - 8a\bar{a}^2) = 0 \\ u\bar{u} = 4a\bar{a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S') \begin{cases} (u+2a)(u^3 - 8a\bar{a}^2) = 0 \\ u\bar{u} = 4a\bar{a} \end{cases}$$

■ (3) ب

لنحل النظمة (S') بحيث :  $a = re^{i\theta}$

لدينا حسب المعادلة الثانية من النظمة (S') :

$$(u+2a)(u^3 - 8a\bar{a}^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (u+2a) = 0 \quad \text{أو} \quad (u^3 - 8a\bar{a}^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow u = -2re^{i\theta} \quad \text{أو} \quad u^3 = 8r^3e^{-i\theta}$$

حلول المعادلة :  $u^3 = 8r^3e^{-i\theta}$  هي الجذور النونية من الدرجة الثالثة للعدد اللعدي  $8r^3e^{-i\theta}$  والتي تكتب بصفة عامة على شكل :

$$k \in \{0,1,2\} \text{ مع } u_k = \left[ \sqrt[3]{8r^3}, \frac{-\theta}{3} + \frac{2k\pi}{3} \right]$$

$$u_0 = \left[ 2r ; \frac{-\theta}{3} \right] = 2re^{-\frac{\theta}{3}} \quad \text{ولدينا :}$$

$$u_1 = \left[ 2r ; \frac{-\theta}{3} + \frac{2\pi}{3} \right] = 2re^{\frac{-\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}}$$

$$u_2 = \left[ 2r ; \frac{-\theta}{3} + \frac{4\pi}{3} \right] = 2re^{\frac{-\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}}$$

$$2re^{-\frac{\theta}{3}}$$

$$-2re^{-i\theta}$$

إذن حلول النظمة هي :

$$2re^{\frac{-\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}}$$

$$2re^{\frac{-\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}}$$

■ (2) ا

ليكن :  $z = x + iy$

ننتقل من الكتابة :  $(z-a)(\bar{z}-\bar{a}) = 4a\bar{a}$

$$\Leftrightarrow z\bar{z} - (z\bar{a} + a\bar{z}) + a\bar{a} = 4a\bar{a}$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2) - (2ax + 2\beta y) + \alpha^2 + \beta^2 = (2|a|)^2$$

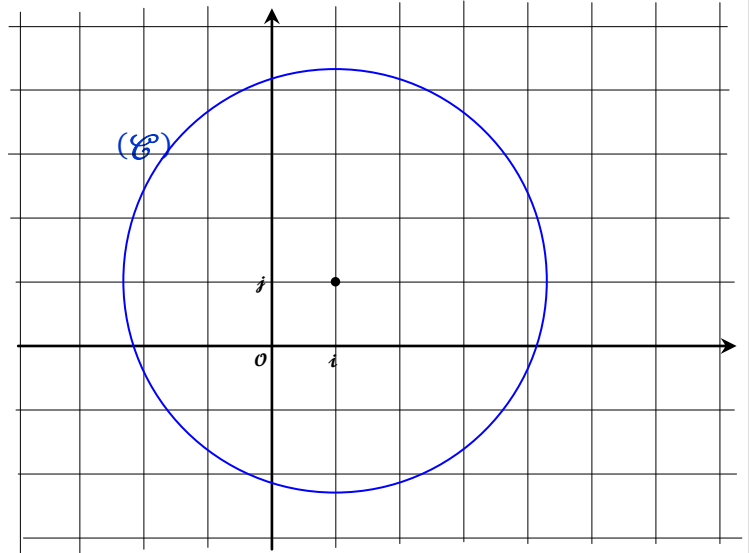
$$\Leftrightarrow (x^2 - 2ax + \alpha^2) + (y^2 - 2\beta y + \beta^2) = (2|a|)^2$$

$$\Leftrightarrow (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = (2|a|)^2$$

إذن : (C) دائرة مركزها النقطة  $C(\alpha, \beta)$  و شعاعها  $r = 2|a|$

■ (2) ا

في حالة  $a = (1 + i)$  لدينا (C) دائرة مركزها  $C(1,1)$  و شعاعها  $2\sqrt{2}$



■ (3) ا

لدينا :  $u = z - a$  : إذن  $\bar{u} = \bar{z} - \bar{a}$

$$\begin{cases} z^2 - \bar{z}^2 = a^2 - \bar{a}^2 \\ (z-a)(\bar{z}-\bar{a}) = 4a\bar{a} \end{cases} \quad \text{ننتقل من الكتابة :}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z^2 - a^2 = \bar{z}^2 - \bar{a}^2 \\ (z-a)(\bar{z}-\bar{a}) = 4a\bar{a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (z-a)(z+a) = (\bar{z}-\bar{a})(\bar{z}+\bar{a}) \\ u\bar{u} = 4a\bar{a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u(u+2a) = \bar{u}(\bar{u}+2\bar{a}) \\ u\bar{u} = 4a\bar{a} \end{cases}$$

1 ب

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 4e^{-x \ln 2} - \frac{2}{x} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \quad \text{بما أن :}$$

فإن : (ع) يقبل فرعا شلجيميا في اتجاه محور الأرتيب

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2 \quad \text{و بما أن :}$$

فإن المستقيم ذو المعادلة  $y = -2$  مقارب أفقي بجوار  $+\infty$

2 ا ب

$$f'(x) = 4(1 - x \ln 2)e^{-x \ln 2}$$

لدينا :  $(\forall x \in \mathbb{R}) ; 4e^{-x \ln 2} > 0$

إذن إشارة  $f'(x)$  متعلقة فقط بإشارة  $(1 - x \ln 2)$

$$f'(x) = 0 \quad \text{فإن} \quad x = \frac{1}{\ln 2} \quad \text{إذا كان :}$$

$$f'(x) < 0 \quad \text{فإن} \quad x > \frac{1}{\ln 2} \quad \text{إذا كان :}$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{فإن} \quad x < \frac{1}{\ln 2} \quad \text{إذا كان :}$$

$$f\left(\frac{1}{\ln 2}\right) = \frac{4}{e \ln 2} - 2 \quad \text{و لدينا :}$$

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة  $f$  كما يلي :

$x$	$-\infty$	$\frac{1}{\ln 2}$	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f$		$\frac{4}{e \ln 2} - 2$	

2 ج

لدينا حسب جدول تغيرات الدالة  $f$  :

$f$  دالة متصلة و تزايدية قطعاً على  $\left] -\infty, \frac{1}{\ln 2} \right[$

إذن  $f$  تقابل من المجال  $\left] -\infty, \frac{1}{\ln 2} \right[$  نحو المجال  $\left] -\infty, \frac{1}{\ln 2} \right[$

و لدينا :  $f\left(\left] -\infty, \frac{1}{\ln 2} \right[ \right) = \left] -\infty, \frac{4}{e \ln 2} - 2 \right[ \approx \left] -\infty, \frac{1}{10} \right[$

و بما أن :  $0 \in \left] -\infty, \frac{1}{10} \right[$

إذن 0 يمتلك سابقاً واحداً وحيداً بالتقابل  $f$  في المجال  $\left] -\infty, \frac{1}{\ln 2} \right[$

و لدينا :  $f(1) = 4e^{-\ln 2} - 2 = 0$

و  $1 \in \left] -\infty, \frac{1}{\ln 2} \right[$

و نعلم أن :  $z = u + ai$

إذن القيم التي يأخذها  $z$  هي :

$$2re^{-\frac{\theta}{3}} + re^{i\theta}$$

$$-re^{-i\theta}$$

$$2re^{-\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}} + re^{i\theta}$$

$$2re^{-\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}} + re^{i\theta}$$

3 ج

نضع :  $z_0(A)$  و  $z_1(B)$  و  $z_2(C)$

نريد أن نبرهن على أن المثلث  $ABC$  متساوي الأضلاع .

لدينا :

$$\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} = \frac{2r - 2rj}{2rj - 2rj} = \frac{1 - j}{j - j} = \frac{1 - j}{-\sqrt{3}i} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} = e^{-\frac{i\pi}{3}}$$

$$\arg\left(\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}\right) \equiv \frac{-\pi}{3} [2\pi] \quad \text{و} \quad \left|\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}\right| \equiv 1 \quad \text{إذن :}$$

و منه :

$$\left(\overline{AB}, \overline{AC}\right) \equiv \frac{-\pi}{3} [2\pi] \quad \text{و} \quad |z_C - z_A| = |z_B - z_A|$$

و بالتالي :  $ABC$  مثلث متساوي الأضلاع (غير مباشر)

التمرين الرابع : (10 ن)

الجزء الأول

1 ا

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (4xe^{-x \ln 2} - 2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \left(\frac{4}{\ln 2}\right) \frac{1}{\left(\frac{e^{x \ln 2}}{x \ln 2}\right)} - 2 \right)$$

$$= \left(\frac{4}{\ln 2}\right) \left(\frac{1}{0^-}\right) - 2 = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \left(\frac{4}{\ln 2}\right) \frac{1}{\left(\frac{e^{x \ln 2}}{x \ln 2}\right)} - 2 \right)$$

$$= \left(\frac{4}{\ln 2}\right) \left(\frac{1}{+\infty}\right) - 2 = \boxed{-2}$$

3) ▀

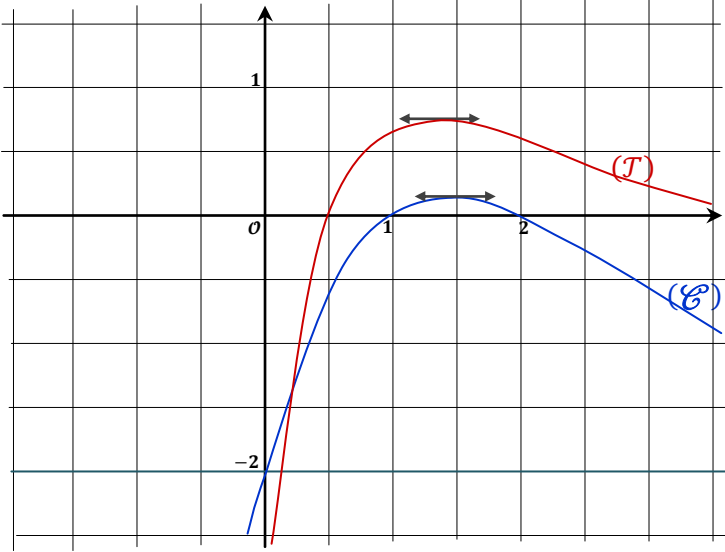
قبل رسم  $(T)$  أضيف نقطة تقاطع  $(T)$  مع محور الأفاصيل  
و التي يحقق أفضولها المعادلة  $g(x) = 0$

نحل المعادلة :  $g(x) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(2x)}{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(2x) = \ln(1)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$



الجزء الثاني

1) ▀

لدينا :  $g'\left(\frac{e}{2}\right) = 0$

إذن  $(T)$  يقبل مماسا أفقيا في النقطة  $\Omega\left(\frac{e}{2}; \frac{2}{e}\right)$

و منه المستقيم  $(\Delta): y = \frac{2}{e}$  يقطع  $(T)$  في نقطة واحدة و هي  $\Omega$

و لدينا حسب الرسم المبياني :  $(T)$  مقعر

إذن كل مستقيم  $y = k$  متواجد بين  $(D)$  و محور الأفاصيل  
يقطع  $(T)$  في نقطتين

و بالتالي : المعادلة  $g(x) = k$  تقبل حلين  $\alpha$  و  $\beta$  مختلفين بشرط

$$0 < k < \frac{2}{e} \quad \text{أن يكون}$$

بما أن :  $g\left(\frac{1}{2}\right) = 0$  و  $\alpha$  و  $\beta$  مختلفين فإن أحدهما أصغر

$$\frac{1}{2} < \alpha < \beta \quad \text{من الآخر ونضع}$$

و لدينا كذلك حسب جدول تغيرات الدالة  $f$

$f$  دالة متصلة و تناقصية قطعا على المجال  $\left[\frac{1}{\ln 2}, +\infty\right[$   
إذن  $f$  تقابل من  $\left[\frac{1}{\ln 2}, +\infty\right[$  نحو صورته  $\left]-2, \frac{1}{10}\right]$

$$\text{مع : } \frac{4}{e \ln 2} - 2 \approx \frac{1}{10}$$

و بما أن :  $0 \in \left]-2, \frac{1}{10}\right]$

فإن الصفر يمتلك سابقا وحيدا بالتقابل  $f$  في المجال  $\left[\frac{1}{\ln 2}, +\infty\right[$

و لدينا :  $2 \in \left[\frac{1}{\ln 2}, +\infty\right[$  ولدينا :  $f(2) = 0$

خلاصة : العددين 1 و 2 هما الحلان الوحيدان للمعادلة  $f(x) = 0$

3) ▀

دراسة الدالة  $g$  :  $g(x) = \frac{\ln(2x)}{x}$

لدينا  $g$  دالة معرفة على المجال  $]0, +\infty[$

و لدينا :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln(2x)}{x}\right) = -\infty$

إذن محور الأرتيب مقارب عمودي لـ  $(T)$

و لدينا :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(2x)}{x}\right) = 0$

إذن محور الأفاصيل مقارب أفقي لـ  $(T)$  بجوار  $+\infty$

$$g'(x) = \frac{1 - \ln(2x)}{x^2}$$

إذا كان :  $x = \frac{e}{2}$  فإن :  $g'(x) = 0$

إذا كان :  $x > \frac{e}{2}$  فإن :  $g'(x) < 0$

إذا كان :  $x < \frac{e}{2}$  فإن :  $g'(x) > 0$

$$\text{و لدينا : } g\left(\frac{e}{2}\right) = \frac{2}{e}$$

و نلخص النتائج في الجدول التالي :

$x$	0	$\frac{e}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$		0	-
$g$	$-\infty$	$\frac{2}{e}$	0

و بنفس الطريقة لدينا  $f_k$  تقابل من  $+\infty$  ;  $\frac{1}{k}$  نحو  $]-2; \frac{4}{ke} - 2[$   
لأنها متصلة و تناقصية قطعا على المجال  $].\frac{1}{k}; +\infty[$ .

بما أن  $]-2; \frac{4}{ke} - 2[ \in 0$  فإن الصفر يمتلك سابقا وحيدا  $b$

من المجال  $].\frac{1}{k}; +\infty[$  بالتقابل  $f_k$

يعني :  $f_k(b) = 0$  و  $b > \frac{1}{k}$

و بالتالي : المعادلة  $f_k(x) = 0$  تقبل بالضبط حلين مختلفين

$a < \frac{1}{k} < b$  بحيث  $a$  و  $b$

■ (3) ب

نلاحظ أن  $f_{\ln 2}(x) = f(x)$

و نعلم أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلين وحيدين و هما 1 و 2

إذن المعادلة  $f_{\ln 2}(x) = 0$  تقبل كذلك حلين وحيدين فقط و هما 1 و 2

و لدينا المعادلة  $f_k(x) = 0$  تقبل بالضبط حلين  $a$  و  $b$

كيفما كان  $0 < k < \frac{2}{e}$

إذن لدينا بالضرورة  $a = 1$  و  $b = 2$  لأن  $a$  و  $b$  وحيدين.

■ (4) ج

$$\int_0^t x e^{-kx} dx = \left[ \frac{x e^{-kx}}{-k} \right]_0^t - \int_0^t \left( \frac{e^{-kx}}{-k} \right) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^t x e^{-kx} dx = \left[ \frac{x e^{-kx}}{-k} \right]_0^t + \frac{1}{k} \left[ \frac{e^{-kx}}{-k} \right]_0^t$$

$$\Leftrightarrow \int_0^t x e^{-kx} dx = \left( \frac{t e^{-kt}}{-k} \right) + \frac{1}{k} \left( \frac{e^{-kt}}{-k} \right) + \frac{1}{k} \left( \frac{1}{k} \right)$$

$$\Leftrightarrow \int_0^t x e^{-kx} dx = \frac{1}{k^2} (1 - k t e^{-kt} - e^{-kt})$$

■ (4) ب

$$I_k = \int_{\alpha}^{\beta} f_k(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} (4x e^{-kx} - 2) dx \quad \text{لدينا :}$$

$$= 4 \left( \int_{\alpha}^{\beta} x e^{-kx} dx \right) - 2(\beta - \alpha)$$

■ (1) ب

ليكن  $\alpha$  و  $\beta$  حلا للمعادلة  $f(x) = 0$

بما أن :  $\frac{1}{2} < \alpha < \beta$

فإنه حسب السؤال (2) ج من الجزء الأول :  $\alpha = 1$  و  $\beta = 2$

من جهة أخرى لدينا حسب السؤال (1) ج من الجزء الثاني :

$\alpha$  و  $\beta$  هما حلا للمعادلة  $g(x) = k$

ومنه :  $g(1) = k$  و  $g(2) = k$

أي :  $\ln 2 = k$  و  $\ln 4 = 2k$

و بالتالي :  $k = \ln 2$

■ (2) ج

ليكن  $x$  عنصرا من  $\mathbb{R}$

$$f'_k(x) = 4(e^{-kx} - kx e^{-kx}) = 4(1 - kx)e^{-kx}$$

■ (2) ب

$x$	$-\infty$	$\frac{1}{k}$	$+\infty$
$f'_k(x)$	+	0	-
$f_k$	$-\infty$	$\frac{4}{ke} - 2$	$-2$

■ (3) ج

لدينا حسب جدول تغيرات الدالة  $f_k$  :

$f_k$  تقابل من  $]-\infty; \frac{1}{k}[$  نحو  $]-\infty; \frac{4}{ke} - 2[$  لأنها متصلة و تزايدية قطعا

و لدينا :  $0 \in ]-\infty; \frac{4}{ke} - 2[$

لأن :

لدينا :  $0 < k < \frac{2}{e}$

إذن :  $\frac{1}{k} > \frac{e}{2}$

ومنه :  $\frac{4}{ke} > 2$

أي :  $\frac{4}{ke} - 2 > 0$

إذن 0 يمتلك سابقا وحيدا  $a$  في المجال  $]-\infty; \frac{1}{k}[$  بالتقابل  $f_k$

و بالتالي بالرجوع إلى (\*) نحصل على :

$$\ln(2\alpha) \cdot \ln(2\beta) \leq 1$$

■ (5)

ليكن  $u$  و  $v$  عدنان حقيقيان مختلفان و موجبان قطعاً بحيث :

$$\begin{aligned} \frac{\ln(u)}{u} &= \frac{\ln(v)}{v} \\ \Leftrightarrow \frac{\ln\left(2\frac{u}{2}\right)}{2\left(\frac{u}{2}\right)} &= \frac{\ln\left(2\frac{v}{2}\right)}{2\left(\frac{v}{2}\right)} \\ \Leftrightarrow \frac{\ln\left(2\frac{u}{2}\right)}{\left(\frac{u}{2}\right)} &= \frac{\ln\left(2\frac{v}{2}\right)}{\left(\frac{v}{2}\right)} \end{aligned}$$

$$\frac{\ln\left(2\frac{u}{2}\right)}{\left(\frac{u}{2}\right)} = \frac{\ln\left(2\frac{v}{2}\right)}{\left(\frac{v}{2}\right)} = k \quad \text{نضع :}$$

إذن العدنان  $\frac{u}{2}$  و  $\frac{v}{2}$  هما حلين للمعادلة :  $\frac{\ln(2x)}{x} = k$

أو بتعبير آخر  $\frac{u}{2}$  و  $\frac{v}{2}$  هما حلين للمعادلة :  $g(x) = k$

لدينا حسب جدول تغيرات الدالة  $g$  :

$\frac{2}{e}$  قيمة قصوية للدالة  $g$  على المجال  $]0; +\infty[$

إذن :  $\forall x \in ]0; +\infty[ ; 0 \leq \frac{\ln(2x)}{x} \leq \frac{2}{e}$

و منه :  $0 \leq k \leq \frac{2}{e}$

لدينا إذن  $\frac{u}{2}$  و  $\frac{v}{2}$  هما حلاً للمعادلة :  $g(x) = k$  بحيث  $0 \leq k \leq \frac{2}{e}$

و بالتالي يمكننا تطبيق نتائج التمرين و خصوصاً نتيجة السؤال (4) (ج)

$$\ln\left(2\frac{u}{2}\right) \cdot \ln\left(2\frac{v}{2}\right) \leq 1 \quad \text{إذن :}$$

$$\ln(u) \cdot \ln(v) \leq 1 \quad \text{و بالتالي :}$$

■ و الحمد لله رب العالمين ■

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} x e^{-kx} dx &= \int_0^{\beta} x e^{-kx} dx - \int_0^{\alpha} x e^{-kx} dx \quad \text{لدينا :} \\ &= \frac{1}{k^2} (1 - k\beta e^{-k\beta} - e^{-k\beta} - 1 + k\alpha e^{-k\alpha} + e^{-k\alpha}) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{k^2} (k\alpha e^{-k\alpha} + e^{-k\alpha} - k\beta e^{-k\beta} - e^{-k\beta})$$

و نعلم أن :  $f_k(\alpha) = 0$  و  $f_k(\beta) = 0$

$$4\beta e^{-k\beta} - 2 = 0 \quad \text{و} \quad 4\alpha e^{-k\alpha} - 2 = 0 \quad \text{إذن :}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad 2\beta &= e^{\beta k} \quad \text{و} \quad (1) \quad 2\alpha = e^{\alpha k} \end{aligned} \quad \text{و منه :}$$

بالرجوع إلى التعبير الأخير للتكامل  $\int_{\alpha}^{\beta} x e^{-kx} dx$

$$\int_{\alpha}^{\beta} x e^{-kx} dx = \frac{1}{k^2} \left( \frac{k\alpha}{2\alpha} + \frac{1}{2\alpha} - \frac{k\beta}{2\beta} - \frac{1}{2\beta} \right) \quad \text{نحصل على :}$$

$$\Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} x e^{-kx} dx = \frac{1}{k^2} \left( \frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2\beta} \right)$$

$$\Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} x e^{-kx} dx = \frac{(\beta - \alpha)}{2\alpha\beta k^2}$$

و بالتالي بالرجوع إلى تعبير التكامل  $I_k$  نحصل على :

$$I_k = \int_{\alpha}^{\beta} f_k(x) dx = 4 \left( \int_{\alpha}^{\beta} (x e^{-kx}) dx \right) - 2(\beta - \alpha)$$

$$\Leftrightarrow I_k = \frac{4(\beta - \alpha)}{2\alpha\beta k^2} - 2(\beta - \alpha)$$

$$\Leftrightarrow I_k = 2(\beta - \alpha) \left( \frac{1}{\alpha\beta k^2} - 1 \right)$$

$$\Leftrightarrow I_k = \frac{2(\beta - \alpha)}{\alpha\beta k^2} (1 - \alpha\beta k^2)$$

■ (4) (ج)

بما أن  $\alpha < \beta$  عدنان حقيقيان موجبان قطعاً و  $\frac{1}{2} < \alpha < \beta$

فإن التكامل  $I_k$  يقيس مساحة و منه  $I_k$  كمية موجبة.

$$\text{إذن : } (1 - \alpha\beta k^2) \geq 0$$

$$\text{يعني : } (\alpha k)(\beta k) \leq 1 \quad (*)$$

باستعمال العلاقتين (1) و (2) نستنتج منهما :

$$(\beta k) = \ln(2\beta)$$

و

$$(\alpha k) = \ln(2\alpha)$$