الامتحان الوطني الموحد
لنيل شهادة البكالوريا
الدورة الاستدراكية 2004

مادة الرياضيات
مسلك العلوم الرياضية أ و ب
المعامل 10
مدة الإنجاز : أربع ساعات

استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (2,5 ن)

يحتوي كيس على 10 كرات بيضاء و 10 كرات حمراء لا يمكن التمييز بينها باللمس، نسحب عشوائيا كرة من الكيس . إذا كانت الكرة المسحوبة حمراء نعيدها إلى الكيس و إذا كانت بيضاء نضع بدلها 3 كرات حمراء في الكيس ثم نسحب كرة من الكيس.

① أحسب الإحتمال لكي تكون الكرتان المسحوبتان حمراوين.	0,50 ن
② أحسب الإحتمال لكي تكون الكرتان المسحوبتان بيضاوين.	0,50 ن
③ أحسب الإحتمال لكي تكون الكرتان المسحوبتان من لونين مختلفين.	0,75 ن
④ أحسب الإحتمال لكي تكون الكرة الأولى المسحوبة بيضاء علما أن الكرة الثانية المسحوبة بيضاء.	0,75 ن

التمرين الثاني : (3,0 ن)

① حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة $\boxed{(E)\ :\ 3x-2y=1}$.	0,75 ن
② ليكن $n\epsilon\mathbb{N}$.	
أ) بين أن : $(14n+3\ ,\ 21n+4)$ حل للمعادلة (E) .	0,25 ن
ب) استنتج أن العددين $(14n+3)$ و $(21n+4)$ أوليان فيما بينهما .	0,50 ن
③ ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين $(2n+1)$ و $(21n+4)$.	
أ) بين أن : $d=1$ أو $d=13$.	0,50 ن
ب) بين أن : $n\equiv 6[13]\ \Leftrightarrow\ d=13$.	0,25 ن
④ من أجل كل عدد صحيح طبيعي n بحيث $n\geq 2$ نضع :	
$\boxed{A=21n^2-17n-4}$ و $\boxed{B=28n^3-8n^2-17n-3}$	
أ) بين أن العددين A و B قابلين للقسمة على $(n-1)$ في المجموعة $\mathbb{Z}$.	0,25 ن
ب) حدد حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر لـ A و B .	0,50 ن

التمرين الثالث : (4,0 ن)

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$

① ليكن $\mathbb{a}$ عددا عقديا غير منعدم مكتوب في شكله الجبري التالي : $\mathbb{a}=\alpha+i\beta$.

لتكن $(\mathcal{H})$ مجموعة النقط M التي لحقها z يحقق : $z^2-(\bar{z})^2=\mathbb{a}^2-(\bar{\mathbb{a}})^2$.

0,50 ن	أ) حدد طبيعة $(\mathcal{H})$.

0,50 ن — ب) أنشىء $(\mathcal{H})$ في الحالة : $\mathbb{a}=1+i$.

② لتكن $(\mathscr{C})$ مجموعة النقط M التي لحقها z يحقق $(z-\mathbb{a})(\bar{z}-\bar{\mathbb{a}})=4\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}}$.

0,75 ن — أ) حدد طبيعة $(\mathscr{C})$.

0,25 ن — ب) أنشىء $(\mathscr{C})$ في الحالة : $\mathbb{a}=1+i$.

③ نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ النظمة التالية : $(\mathcal{S}) : \begin{cases} z^2-(\bar{z})^2=\mathbb{a}^2-(\bar{\mathbb{a}})^2 \\ (z-\mathbb{a})(\bar{z}-\bar{\mathbb{a}})=4\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}} \end{cases}$

نضع : $u=z-\mathbb{a}$.

0,75 ن — أ) بين أن النظمة $(\mathcal{S})$ تكافىء النظمة : $(\mathcal{S}') : \begin{cases} u\bar{u}=4\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}} \\ (u+2\mathbb{a})(u^3-8\mathbb{a}(\bar{\mathbb{a}})^2)=0 \end{cases}$

0,75 ن — ب) نضع $\mathbb{a}=re^{i\theta}$ حيث $r>0$ و $-\pi\le\theta\le\pi$.

حدد بدلالة r و θ ألحاق نقط تقاطع $(\mathscr{C})$ و $(\mathcal{H})$.

0,50 ن — ج) استنتج أن تقاطع $(\mathscr{C})$ و $(\mathcal{H})$ يتضمن ثلاث نقط و هي رؤوس لمثلث متساوي الأضلاع .

التمرين الرابع : (10,5 ن)

(I) لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتين بما يلي : $f(x)=4xe^{-x\ln 2}-2$ و $g(x)=\dfrac{\ln(2x)}{x}$

و ليكن $(\mathscr{C})$ و $(\mathcal{T})$ المنحنيين الممثلين للدالتين f و g على التوالي في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

0,75 ن — ① أ) أحسب نهايتي f عند $(-\infty)$ و $(+\infty)$.

0,50 ن — ب) حدد الفرعين اللانهائيين للمنحنى $(\mathscr{C})$.

0,75 ن — ② أ) بين أن : $f'(x)=4(1-x\ln 2)e^{-x\ln 2}$; $(\forall x\epsilon\mathbb{R})$.

0,75 ن — ب) اعط جدول تغيرات الدالة f .

بين أن العددين 1 و 2 هما الحلين الوحيدين للمعادلة $f(x)=0$

0,75 ن — ③ أدرس الدالة g : الفروع اللانهائية – النهايات – التغيرات.

0,50 ن — ④ ارسم $(\mathscr{C})$ و $(\mathcal{T})$ في نفس المعلم . $(\|\vec{\imath}\|=\|\vec{\jmath}\|=4cm)$

تحديد نقط الإنعطاف غير مطلوب نأخذ : $\dfrac{1}{\ln 2}\approx 1{,}4$ و $\dfrac{1}{e}\approx 0{,}4$ و $e\approx 2{,}7$ و $\ln 2\approx 0{,}7$

(II) ليكن k عددا حقيقيا بحيث : $0 < k < \frac{2}{e}$

0,75 ن | ① (أ) تحقق مبيانيا أن المعادلة $g(x) = k$ تقبل حلين مختلفين لـ α و β بحيث : $\frac{1}{2} < \alpha < \beta$

0,75 ن | (ب) حدد قيمة k بحيث يكون α و β هما حلا المعادلة $f(x) = 0$.

نعتبر الدالة العددية f_k المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\boxed{. f_k(x) = 4xe^{-kx} - 2}$

0,50 ن | ② (أ) تأكد من أن : $f'_k(x) = 4(1 - kx)e^{-kx}$; $(\forall x \in \mathbb{R})$.

0,50 ن | (ب) إعط جدول تغيرات f_k .

0,50 ن | ③ (أ) استنتج أن المعادلة $f_k(x) = 0$ تقبل بالضبط حلين مختلفين a و b . بحيث : $a < \frac{1}{k} < b$

0,75 ن | (ب) بين أن $a = \alpha$ و $b = \beta$

0,75 ن | ④ (أ) باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن : $\int_0^t xe^{-kx}\,dx = \frac{1}{k^2}(1 - kte^{-kt} - e^{-kt})$; $(\forall t \in \mathbb{R})$

0,75 ن | (ب) أحسب التكامل : $I_k = \int_\alpha^\beta f_k(x)dx$ بدلالة α و β .

0,50 ن | (ج) استنتج أن : $\ln(2\alpha) \cdot \ln(2\beta) \leq 1$

0,75 ن | ⑤ بين أنه إذا كان u و v عددان حقيقيان مختلفين موجبين قطعا . بحيث : $\frac{\ln(u)}{u} = \frac{\ln(v)}{v}$

فإن : $\ln(u) \cdot \ln(v) \leq 1$