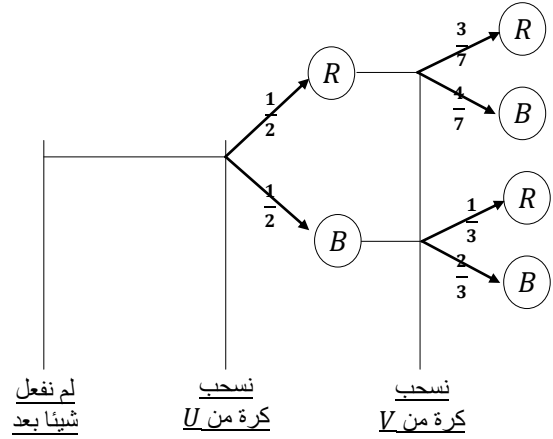


التمرين الأول : (3,0 ن)

1 ■

النموذج الأمثل لحل هذا التمرين هو استعمال شجرة الاحتمالات التالية :



لدينا حسب الشجرة :  $P(R_1) = P(B_1) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

2 ■

$$P_{B_1}(B_2) = \frac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_1)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$P_{R_1}(B_2) = \frac{P(R_1 \cap B_2)}{P(R_1)} = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{7}$$

3 ■

لدينا :

$$P(B_2) = P(R_1 \cap B_2) + P(B_1 \cap B_2)$$

$$= P(R_1) \times P_{R_1}(B_2) + P(B_1) \times P_{B_1}(B_2)$$

$$= \left(\frac{1}{2} \times \frac{4}{7}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\right) = \frac{13}{21}$$

4 ■

الطريقة الأولى : استعمال تقنية الحدث المؤكد

$$P(B_2) + P(R_2) = 1$$

$$\Leftrightarrow P(R_2) = 1 - P(B_2)$$

$$\Leftrightarrow P(R_2) = 1 - \frac{13}{21} = \frac{8}{21}$$

الطريقة الثانية : (استعمال الشجرة)

$$P(R_2) = P(R_1 \cap R_2) + P(B_1 \cap R_2)$$

$$\Leftrightarrow P(R_2) = P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) + P(B_1) \times P_{B_1}(R_2)$$

$$\Leftrightarrow P(R_2) = \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{7}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{21}$$

التمرين الثاني : (4,5 ن)

1 ■

لدينا :

$$p^2 - (3 \cos \theta + 5i \sin \theta)^2$$

$$= (5 \cos \theta + 3i \sin \theta)^2 - (3 \cos \theta + 5i \sin \theta)^2$$

$$= 25 \cos^2 \theta - 9 \sin^2 \theta - 9 \cos^2 \theta + 25 \sin^2 \theta$$

$$= 25(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) - 9(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)$$

$$= 25 - 9$$

$$= 16$$

1 ■

لدينا :  $\Delta' = p^2 - 16 = (3 \cos \theta + 5i \sin \theta)^2$

إن المعادلة (E) تقبل حلين في  $\mathbb{C}$ .

$$z_1 = p + (3 \cos \theta + 5i \sin \theta) = 2e^{-i\theta}$$

$$z_2 = p - (3 \cos \theta + 5i \sin \theta) = 8e^{i\theta}$$

2 ■

ليكن  $\theta$  عنصرا من  $[0; 2\pi[$ .

نضع :  $\text{aff}(M_1) = 2e^{-i\theta} = x + iy$

$$\Leftrightarrow 2 \cos(-\theta) + 2i \sin(-\theta) = x + iy$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cos(\theta) = x \\ -2 \sin(\theta) = y \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = (2 \cos(\theta))^2 + (-2 \sin(\theta))^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 4(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 4$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 2^2$$

إن :  $M_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  تنتمي إلى الدائرة (C) التي مركزها O وشعاعها 2.

2 ■

لدينا P هي منتصف القطعة  $[M_1 M_2]$

$$\Leftrightarrow \text{aff}(P) = \frac{\text{aff}(M_1) + \text{aff}(M_2)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \text{aff}(P) = \frac{2e^{-i\theta} + 8e^{i\theta}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \text{aff}(P) = (\cos \theta - i \sin \theta) + 4(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$\Leftrightarrow \text{aff}(P) = 5 \cos \theta + 3i \sin \theta$$

$$\Leftrightarrow \text{aff}(P) = p$$

لدينا :  $P(5 \cos \theta ; 3 \sin \theta)$

إذن معادلة المماس (T) للمنحنى (Γ) في النقطة P هي :

$$(T) : \frac{5x \cos \theta}{5^2} + \frac{3y \sin \theta}{3^2} = 1$$

$$(T) : 3x \cos \theta + 5y \sin \theta = 15$$

لدينا :  $(T) : 3x \cos \theta + 5y \sin \theta = 15$

$$(T) : y = \left( \frac{-3 \cos \theta}{5 \sin \theta} \right) x + \left( \frac{3}{\sin \theta} \right)$$

إذن : ميل المستقيم (T) هو :  $\left( \frac{-3 \cos \theta}{5 \sin \theta} \right)$

لنحسب الآن ميل المستقيم  $(M_1 M_2)$  .

لدينا :  $M_2 \left( \frac{8 \cos \theta}{8 \sin \theta} \right)$  و  $M_1 \left( \frac{2 \cos \theta}{-2 \sin \theta} \right)$

$$m = \frac{8 \sin \theta - (-2 \sin \theta)}{8 \cos \theta - 2 \cos \theta} = \left( \frac{5 \sin \theta}{3 \cos \theta} \right) \quad \text{إذن :}$$

إذن ميل المستقيم  $(M_1 M_2)$  هو  $\left( \frac{5 \sin \theta}{3 \cos \theta} \right)$

و بالتالي : (T) و  $(M_1 M_2)$  متعامدان لأن جداء ميليهما يساوي (-1)

$$\left( \frac{-3 \cos \theta}{5 \sin \theta} \right) \times \left( \frac{5 \sin \theta}{3 \cos \theta} \right) = -1$$

### التمرين الثالث : (3,0 ن)

نضع :  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$

لدينا :  $3^2 - 2 \times 2^2 = 1$

إذن :  $A = M(3,2) \in E$

لتكن  $M(a,b)$  و  $M(c,d)$  مصفوفتين من E

لدينا :  $M(a,b) \times M(c,d) = \begin{pmatrix} a & b\sqrt{2} \\ b\sqrt{2} & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d\sqrt{2} \\ d\sqrt{2} & c \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow M(a,b) \times M(c,d) = \begin{pmatrix} ac + 2bd & (bc + ad)\sqrt{2} \\ (bc + ad)\sqrt{2} & ac + 2bd \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow M(a,b) \times M(c,d) = M(ac + 2bd ; ad + bc) (*)$$

نضع :  $p = x + iy$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \cos(\theta) \\ y = 3 \sin(\theta) \end{cases}$$

لدينا حسب نتيجة السؤال (1) :  $p^2 - (3 \cos \theta + 5i \sin \theta)^2 = 16$

$$\Leftrightarrow (x + iy)^2 - \left( \frac{3x}{5} + \frac{5i}{3} y \right)^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow \frac{16}{25} x^2 + \frac{16}{9} y^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$

إذن عندما يتغير العدد  $\theta$  في المجال  $[0; 2\pi[$

فإن النقطة P تتغير على الإهليلج (Γ) الذي مركزه O

و رؤوسه :  $A(5,0)$  و  $A'(-5,0)$  و  $B(0,3)$  و  $B'(0,-3)$

و بؤرتاه :  $F(4,0)$  و  $F'(-4,0)$

(لأن :  $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 \Rightarrow c = 4$ )

ليكن a و b عنصرين من  $\mathbb{C} \setminus \{4\}$  بحيث :  $\frac{(b+4)}{(b-4)} = -\frac{(a+4)}{(a-4)}$

$$\Leftrightarrow (b+4)(4-a) = (b-4)(a+4)$$

$$\Leftrightarrow 2ab = 32$$

$$\Leftrightarrow ab = 16$$

لدينا :  $z_2 = 8e^{i\theta} \neq 4$  و  $z_1 = 2e^{-i\theta} \neq 4$

$$z_1 z_2 = 16e^{i\theta} e^{-i\theta} = 16 \quad \text{إذن :}$$

$$\text{و منه حسب (3) : } \frac{(z_2 + 4)}{(z_2 - 4)} = -\frac{(z_1 + 4)}{(z_1 - 4)}$$

نتطلق من الكتابة :  $\frac{(z_2 + 4)}{(z_2 - 4)} = -\frac{(z_1 + 4)}{(z_1 - 4)}$

$$\Leftrightarrow \frac{(4 - z_1)}{(-4 - z_1)} = -\frac{(4 - z_2)}{(-4 - z_2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(z_F - z_1)}{(z_{F'} - z_1)} = -\frac{(z_F - z_2)}{(z_{F'} - z_2)}$$

$$\Leftrightarrow \arg \left( \frac{z_F - z_1}{z_{F'} - z_1} \right) \equiv \pi + \arg \left( \frac{z_F - z_2}{z_{F'} - z_2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left( \overline{M_1 F} ; \overline{M_1 F'} \right) \equiv \pi + \left( \overline{M_2 F} ; \overline{M_2 F'} \right) [2\pi]$$

توصلنا كذلك إلى أن كل عنصر  $M(a, b)$  يقبل ممتالا و هو  $M(a, -b)$

نستنتج إذن أن  $(E, \times)$  زمرة.

و بما أن  $\times$  تبادلي في  $E$ .

فإن  $(E, \times)$  زمرة تبادلية.

■ (3) (أ)

ليكن  $\times$  عنصرا من  $G$ .

إذن :  $X = A^m$  ;  $(\exists m \in \mathbb{N})$

نريد أن نبرهن على أن  $A^n \in E$  ;  $(\forall n \in \mathbb{N})$

لدينا من أجل  $n = 0$  :  $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M(1, 0) \in E$

نفترض أن :  $A^n \in E$  ;  $(\forall n \in \mathbb{N})$

لدينا :  $A^n \in E$  و  $A \in E$

إذن  $A^n \times A \in E$

لأن  $\times$  قانون داخلي في  $E$ .

إذن :  $A^{n+1} \in E$

و بالتالي :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; A^n \in E$

و منه :  $X = A^m \in E$

خلاصة القول :  $G \subset E$

■ (3) (ب)

للإجابة على هذا السؤال يكفي أن نبين أن :  $(A^n)^{-1} = B^n$

من أجل  $n = 0$  لدينا :  $(A^0)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B^0$

نفترض أن :  $(A^n)^{-1} = B^n$  ;  $(\forall n \in \mathbb{N})$

لدينا :  $(A^{n+1})^{-1} = (A^n \times A)^{-1}$

$= A^{-1} \times (A^n)^{-1}$

$= B \times B^n$

$= B^{n+1}$

و بالتالي :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; (A^n)^{-1} = B^n$

■ (3) (ج)

لنبرهن في البداية على الخاصية (#) التالية :

(#)  $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2 ; A^m \times B^n \in G \cup H$

ليكن  $m$  و  $n$  عددين صحيحين طبيعيين

نفصل هنا بين حالتين أساسيتين :

الحالة الأولى : إذا كان  $m \geq n$

لدينا :  $A^m \times B^n = A^{m-n} \times (A \times B)^n$

$= A^{m-n} \times I$

$= A^{m-n} \in G \subset G \cup H$

و لدينا :  $(ac + 2bd)^2 - 2(bc + ad)^2$

$$\begin{aligned} &= (ac)^2 + 4(bd)^2 - 2(bc)^2 - 2(ad)^2 \\ &= c^2 \underbrace{(a^2 - 2b^2)}_1 + 2d^2 \underbrace{(2b^2 - a^2)}_{-1} \\ &= c^2 - 2d^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

إذن :  $M(ac + 2bd ; bc + ad) \in E$

و بالتالي :  $E$  جزء مستقر من  $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$ .

بالإستعانة بالعلاقة (\*) لدينا :

$$\begin{aligned} M(a, b) \times M(c, d) &= M(ac + 2bd ; ad + bc) \\ &= M(ca + 2db ; cb + da) \\ &= M(c, d) \times M(a, b) \end{aligned}$$

إذن القانون  $\times$  تبادلي في  $E$ .

■ (2) (ب)

لتكن  $M(a, b)$  مصفوفة من  $E$

$$\begin{aligned} (M(a, b))^{-1} &= \frac{1}{\det M(a, b)} \begin{pmatrix} a & -b\sqrt{2} \\ -b\sqrt{2} & a \end{pmatrix} \text{ لدينا} \\ &= \frac{1}{(a^2 - 2b^2)} \begin{pmatrix} a & -b\sqrt{2} \\ -b\sqrt{2} & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & -b\sqrt{2} \\ -b\sqrt{2} & a \end{pmatrix} = M(a, -b) \in E \end{aligned}$$

و بالتالي : مقلوب كل مصفوفة  $M(a, b)$  هو المصفوفة  $M(a, -b)$

بتعبير آخر :  $(M(a, b))^{-1} = M(a, -b)$

■ (2) (ج)

لدينا حسب الأسئلة السابقة :

$\times$  قانون تركيب داخلي في المجموعة  $E$  لأن  $E$  جزء مستقر من  $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$

و بما أن  $\times$  تجميعي في  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

فإن  $\times$  تجميعي كذلك في  $E$ .

و بما أن المصفوفة  $I = M(1, 0)$  هي العنصر المحايد لـ  $\times$  في  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

فإن  $I = M(1, 0)$  هو العنصر المحايد لـ  $\times$  في  $E$

و ذلك لأن العنصر المحايد إن وجد فإنه يكون دائما وحيدا.

**الحالة الرابعة :** إذا كان  $X \in H$  و  $Y \in G$  :

إذن :  $Y = A^m$  و  $X = B^n$  ;  $\exists (m, n) \in \mathbb{N}^2$

$$\begin{aligned} X \times Y^{-1} &= B^n \times (A^m)^{-1} && \text{و منه :} \\ &= B^n \times B^m \\ &= B^{m+n} \in H \subset G \cup H \end{aligned}$$

و منه :  $X \times Y^{-1} \in G \cup H$

**خلاصة القول :** نلاحظ أنه في جميع هذه الحالات الأربع نجد :

$$(\forall X, Y \in G \cup H) ; X \times Y^{-1} \in G \cup H$$

و بالتالي :  $G \cup H$  زمرة جزئية من  $(E, \times)$  .

**التمرين الرابع : (9,5 ن)**

■ (1) (أ)

لدينا :  $g_n(x) = x + e^{-nx}$

إذن  $g_n$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  .

لأنها مجموع دالتين اعتياديتين قابلتين للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  .

و لدينا :  $g'_n(x) = 1 - ne^{-nx} = e^{-nx}(e^{nx} - n)$

بما أن :  $e^{-nx} > 0$  ;  $(\forall x \in \mathbb{R}), (\forall n \in \mathbb{N})$

فإن إشارة  $g'_n(x)$  متعلقة فقط بإشارة  $(e^{nx} - n)$

إذا كان  $x = \frac{\ln n}{n}$  فإن :  $g'_n(x) = 0$

إذا كان  $x > \frac{\ln n}{n}$  فإن :  $g'_n(x) > 0$  يعني  $g_n$  تزايدية

إذا كان  $x < \frac{\ln n}{n}$  فإن :  $g'_n(x) < 0$  يعني  $g_n$  تناقصية

■ (1) (ب)

لدينا الدالة  $g_n$  متصلة على  $\mathbb{R}$  .

و تناقصية على  $]-\infty ; \frac{\ln n}{n}[$  .

و تزايدية على  $]\frac{\ln n}{n} ; +\infty[$

و تتعدم في  $\frac{\ln n}{n}$

إذن  $g_n$  تقبل قيمة دنوية عند  $u_n = \frac{\ln n}{n}$  و هذه القيمة هي

$$g_n(u_n) = \frac{1 + \ln n}{n}$$

إذن :  $A^m \times B^n \in G \cup H$

**الحالة الثانية :** إذا كان  $m \leq n$  :

$$\begin{aligned} A^m \times B^n &= (A \times B)^m \times B^{n-m} && \text{لدينا :} \\ &= I \times B^{n-m} \\ &= B^{n-m} \in H \subset G \cup H \end{aligned}$$

إذن :  $A^m \times B^n \in G \cup H$

و بالتالي :  $(\#) \forall (m, n) \in \mathbb{N}^2 ; A^m \times B^n \in G \cup H$

نستغل إذن هذه الخاصية الثمينة للإجابة على السؤال (ج) :

من الواضح أن  $G \cup H$  جزء غير فارغ من  $E$  لأن :  $(G, H) \subset E^2$

لتكن  $X$  و  $Y$  مصفوفتين من  $G \cup H$  و نفصل بين أربع حالات أساسية :

**الحالة الأولى :** إذا كان  $X \in G$  و  $Y \in G$  :

إذن :  $Y = A^m$  و  $X = A^n$  ;  $\exists (m, n) \in \mathbb{N}^2$

و منه :  $X \times Y^{-1} = A^n \times (A^m)^{-1}$

أي :  $X \times Y^{-1} = A^n \times B^m$

إذن :  $A^n \times B^m \in G \cup H$  و ذلك حسب خاصيتنا الثمينة (#) .

و منه :  $X \times Y^{-1} \in G \cup H$

**الحالة الثانية :** إذا كان  $X \in H$  و  $Y \in H$  :

إذن :  $Y = B^m$  و  $X = B^n$  ;  $\exists (m, n) \in \mathbb{N}^2$

و منه :  $X \times Y^{-1} = B^n \times (B^m)^{-1}$

أي :  $X \times Y^{-1} = B^n \times A^m$

إذن :  $B^n \times A^m \in G \cup H$  و ذلك حسب خاصيتنا الثمينة (#) .

و منه :  $X \times Y^{-1} \in G \cup H$

**الحالة الثالثة :** إذا كان  $X \in G$  و  $Y \in H$  :

إذن :  $Y = B^m$  و  $X = A^n$  ;  $\exists (m, n) \in \mathbb{N}^2$

و منه :  $X \times Y^{-1} = A^n \times (B^m)^{-1}$

أي :  $X \times Y^{-1} = A^n \times A^m = A^{m+n} \in G \subset G \cup H$

و منه :  $X \times Y^{-1} \in G \cup H$

بما أن :  $e^{-x} > 0$  ;  $(\forall x \in \mathbb{R})$  فإن إشارة الفرق  $g_1(x) - g_2(x)$  متعلقة فقط بإشارة  $(1 - e^{-x})$  و نفضل هنا بين ثلاث حالات :

الحالة الأولى : إذا كان  $x = 0$

فإن :  $(1 - e^{-x}) = 0$  و منه  $g_1(x) = g_2(x)$

إذن :  $(\mathcal{E}_1)$  و  $(\mathcal{E}_2)$  يتقاطعان في النقطة  $(0,1)$  .

الحالة الثانية : إذا كان  $x > 0$

فإن :  $(1 - e^{-x}) > 0$  و منه  $g_1(x) > g_2(x)$

إذن :  $(\mathcal{E}_1)$  يوجد فوق  $(\mathcal{E}_2)$

الحالة الثالثة : إذا كان  $x < 0$

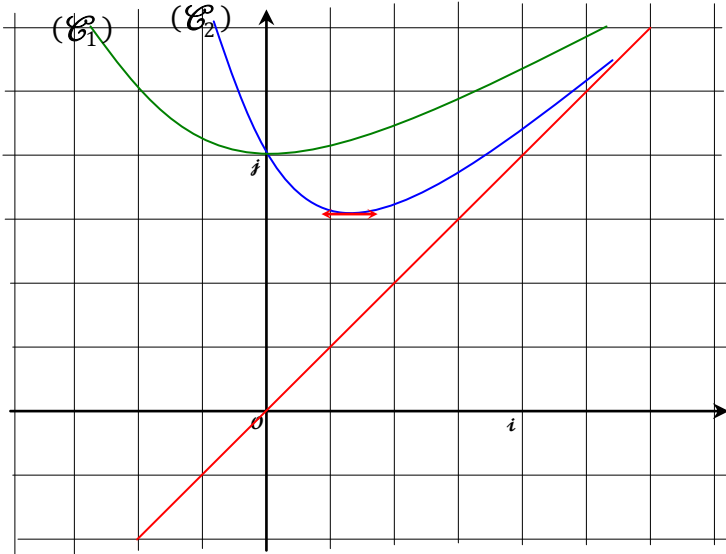
فإن :  $(1 - e^{-x}) < 0$  و منه  $g_1(x) < g_2(x)$

إذن :  $(\mathcal{E}_1)$  يوجد أسفل  $(\mathcal{E}_2)$

خلاصة :

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$g_1(x) - g_2(x)$	-	0	+
الوضع النسبي $(\mathcal{E}_1)$ و $(\mathcal{E}_2)$	$(\mathcal{E}_2)$ فوق $(\mathcal{E}_1)$	$(\mathcal{E}_1)$ و $(\mathcal{E}_2)$ يتقاطعان في $(0,1)$	$(\mathcal{E}_1)$ فوق $(\mathcal{E}_2)$

3 ■



4 ■

$$I(x) = \int_0^x t \underbrace{e^{-2t}}_{v'} dt$$

$$\Leftrightarrow I(x) = \left[ \frac{-te^{-2t}}{2} \right]_0^x + \frac{1}{2} \int_0^x e^{-2t} dt$$

$$\Leftrightarrow I(x) = \left[ \frac{-te^{-2t}}{2} \right]_0^x + \frac{1}{2} \left[ \frac{-e^{-2t}}{2} \right]_0^x$$

$$\Leftrightarrow I(x) = \frac{-xe^{-2x}}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{-e^{-2x}}{2} + \frac{1}{2} \right)$$

2 ■

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} g_n(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + e^{-nx}) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left( 1 + \frac{n}{nxe^{nx}} \right) \\ &= (-\infty) \left( 1 + \frac{n}{0^-} \right) \\ &= (-\infty)(-\infty) \\ &= (+\infty) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + e^{-nx}) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( 1 + \frac{n}{nxe^{nx}} \right) \\ &= (+\infty) \left( 1 + \frac{n}{(+\infty)} \right) \\ &= (+\infty)(1) \\ &= (+\infty) \end{aligned}$$

2 ■

لدينا :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) = +\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g_n(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{n}{nxe^{nx}} \right) : \text{ولدينا} \\ &= \left( 1 + \frac{n}{+\infty} \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

ولدينا :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g_n(x) - 1x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-nx} = 0$

إذن المنصف الأول للمعلم  $y = x$  مقارب مائل لـ  $(\mathcal{E}_n)$  بجوار  $(+\infty)$  .

ولدينا من جهة أخرى :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g_n(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g_n(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 1 + \frac{n}{nxe^{nx}} \right) = (-\infty) \text{ و}$$

إذن :  $(\mathcal{E}_n)$  يقبل فرعاً شلجيمياً في اتجاه محور الأرتيب.

3 ■

لدراسة الوضع النسبي للمنحنيين  $(\mathcal{E}_1)$  و  $(\mathcal{E}_2)$

ندرس إشارة الفرق :  $g_1(x) - g_2(x)$

$$\begin{aligned} g_1(x) - g_2(x) &= (x + e^{-x}) - (x + e^{-2x}) : \text{لدينا} \\ &= e^{-x} - e^{-2x} \\ &= e^{-x}(1 - e^{-x}) \end{aligned}$$

2 (II) ■

لدينا حسب جدول تغيرات الدالة  $f_n$  :

$f_n$  دالة متصلة و تزايدية قطعاً على  $\mathbb{R}$

إذن  $f_n$  تقابل من  $\mathbb{R}$  نحو  $\mathbb{R}$  .

و بما أن : 0 عدد حقيقي فإنه يقبل سابقاً واحداً  $\alpha_n$  بالتقابل  $f_n$

بتعبير آخر :  $\exists! \alpha_n \in \mathbb{R} ; f_n(\alpha_n) = 0$

3 (II) ■

بما أن  $f_n$  تقابل من  $\mathbb{R}$  نحو  $\mathbb{R}$

فإن  $f_n$  تقابل من أي مجال  $I$  من  $\mathbb{R}$  نحو صورته  $f_n(I)$  .

نأخذ المجال  $]-\ln 2 ; \frac{-1}{2}[$  و نقول من أجل  $n = 1$

$f_1$  تقابل من  $]-\ln 2 ; \frac{-1}{2}[$  نحو صورته  $]\frac{1}{2} - \ln 2 ; \frac{-1}{2} + e^{\frac{-1}{2}}[$

و باستعمال القيم المقربة نحصل على :

$f_1$  تقابل من  $]-\ln 2 ; \frac{-1}{2}[$  نحو  $] -0,2 ; 0,1[$

و بما أن  $0 \in ] -0,2 ; 0,1[$  فإنه يمتلك سابقاً واحداً  $\alpha_1$  من  $]-\ln 2 ; \frac{-1}{2}[$

يعني :  $\exists! \alpha_1 \in ] -\ln 2 ; \frac{-1}{2}[ ; f_1(\alpha_1) = 0$

3 (II) ■

لدينا  $f_1(\alpha_1) = 0$  إذن :  $(\alpha_1 + e^{\alpha_1}) = 0$  و منه :  $-\alpha_1 = e^{\alpha_1}$

الحالة الأولى : إذا كان  $(x - \alpha_1) > 0$

فإن :  $x > \alpha_1$  و منه  $e^x > e^{\alpha_1}$

يعني :  $e^x > -\alpha_1$  إذن :  $(e^x + \alpha_1) > 0$

الحالة الثانية : إذا كان  $(x - \alpha_1) < 0$

فإن :  $x < \alpha_1$  و منه  $e^x < e^{\alpha_1}$

يعني :  $e^x < -\alpha_1$  إذن :  $(e^x + \alpha_1) < 0$

نستنتج من هاتين الحالتين أن الكمييتين  $(x - \alpha_1)$  و  $(e^x + \alpha_1)$  لهما نفس الإشارة .

4 (II) ■

لدينا :  $\varphi(x) = e^x - \frac{1}{\sqrt{e}}x$

إذن :  $\varphi'(x) = e^x - \frac{1}{\sqrt{e}}$

من أجل :  $x \leq \frac{-1}{2}$

لدينا :  $e^x \leq e^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

و منه :  $e^x - \frac{1}{\sqrt{e}} \leq 0$

أي :  $\forall x \in ]-\infty ; \frac{-1}{2}] ; \varphi'(x) \leq 0$

و بالتالي :  $\varphi$  دالة تناقصية على المجال  $]-\infty ; \frac{-1}{2}]$

$$\Leftrightarrow I(x) = \frac{-e^{-2x}}{4} (2x + 1 - e^{2x})$$

4 (II) ■

لدينا :  $\forall x \in [0; \ln 2] ; h_2(x) = x + e^{-2x}$

إذن  $h_2$  متصلة على المجال :  $[0; \ln 2]$

و  $\forall x \in [0; \ln 2] ; h_2(x) > 0$

إذن حجم مجسم الدوران الذي يولده دوران التمثيل المبياني لـ  $h_2$

حول محور الأفاصيل هو :

$$V = \pi \int_0^{\ln 2} (h_2(x))^2 dx$$

$$\Leftrightarrow V = \pi \int_0^{\ln 2} (x + e^{-2x})^2 dx$$

$$\Leftrightarrow V = \pi \int_0^{\ln 2} (x^2 + e^{-4x} + 2xe^{-2x}) dx$$

$$\Leftrightarrow V = \pi \left( \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^{\ln 2} + \left[ \frac{-e^{-4x}}{4} \right]_0^{\ln 2} + 2I(\ln 2) \right)$$

$$\Leftrightarrow V = \pi \left( \frac{(\ln 2)^3}{3} - \frac{\ln 2}{4} + \frac{39}{64} \right)$$

5 ■

لدينا حسب نتيجة السؤال 1 (ب) :

$$u_n = \frac{\ln n}{n} \quad \text{و} \quad v_n = g_n(u_n) = \left( \frac{1 + \ln n}{n} \right)$$

$$\text{و لدينا : } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln n}{n} \right) = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1 + \ln n}{n} \right) = 0$$

إذن  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  و  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتاليتان متقاربتان و تؤولان معا إلى الصفر.

1 (II) ■

لدينا :  $f_n(x) = x + e^{nx}$

إذن :  $f'_n(x) = 1 + ne^{nx} > 0$

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة  $f_n$  كما يلي :

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f'_n(x)$		+
$f_n$	$-\infty$	$+\infty$

نعلم أن الدالة  $Exp$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$ .

إذن نستطيع تطبيق ميرهنة التزايديات المنتهية على أي مجال من  $\mathbb{R}$ .

نختار المجال الذي طرفاه  $\alpha_1$  و  $x$  بحيث:  $x \in ]-\infty; \frac{-1}{2}]$

إذن يوجد  $c$  محصور بين  $\alpha_1$  و  $x$  بحيث:

$$\frac{e^x - e^{\alpha_1}}{x - \alpha_1} = e^c \Leftrightarrow \frac{e^x + \alpha_1}{x - \alpha_1} = e^c$$

و بما أن  $(e^x + \alpha_1)$  و  $(x - \alpha_1)$  لهما نفس الإشارة فإن:

$$\Rightarrow \frac{|e^x + \alpha_1|}{|x - \alpha_1|} = e^c$$

$$\Leftrightarrow |e^x + \alpha_1| = e^c |x - \alpha_1| \quad (*)$$

من جهة أخرى لدينا:  $c \in ]-\infty; \frac{-1}{2}]$  إذن:  $c < \frac{-1}{2}$

$$\text{و منه: } e^c < \frac{1}{\sqrt{e}}$$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في العدد الموجب  $|x - \alpha_1|$  نحصل على:

$$(**) \quad e^c |x - \alpha_1| \leq \frac{1}{\sqrt{e}} |x - \alpha_1|$$

من النتيجتين (\*) و (\*\*) نستنتج أن:

$$\forall x \in ]-\infty; \frac{-1}{2}] ; |e^x + \alpha_1| \leq \frac{1}{\sqrt{e}} |x - \alpha_1|$$

في البداية يجب أن نبرهن على أن:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : \frac{-1}{\sqrt{e}} \leq \beta_n \leq \frac{-1}{2}$$

من أجل:  $n = 0$  لدينا:  $\frac{-1}{\sqrt{e}} \leq \beta_0 = \frac{-1}{2} \leq \frac{-1}{2}$

نفترض أن:  $(\forall n \in \mathbb{N}) : \frac{-1}{\sqrt{e}} \leq \beta_n \leq \frac{-1}{2}$

$$\text{إذن: } e^{\frac{-1}{\sqrt{e}}} \leq e^{\beta_n} \leq e^{\frac{-1}{2}}$$

$$\text{و منه: } \frac{-1}{\sqrt{e}} \leq -e^{\beta_n} \leq -e^{\frac{-1}{\sqrt{e}}}$$

بالاستعانة بالآلة الحاسبة نجد:  $-e^{\frac{-1}{\sqrt{e}}} \approx -0,54 < \frac{-1}{2}$

$$\text{إذن: } \frac{-1}{\sqrt{e}} \leq -e^{\beta_n} \leq \frac{-1}{2}$$

أي:  $(\forall n \in \mathbb{N}) : \frac{-1}{\sqrt{e}} \leq \beta_{n+1} \leq \frac{-1}{2}$

و بالتالي حسب مبدأ التراجع:  $(\forall n \in \mathbb{N}) : \frac{-1}{\sqrt{e}} \leq \beta_n \leq \frac{-1}{2}$

ما يهمنا في هذا التأطير هو الشق:  $(*) \quad \beta_n \leq \frac{-1}{2}$

و ذلك من أجل تطبيق نتيجة السؤال (ب)

لدينا حسب نتيجة السؤال (ب):

$$\forall x \in ]-\infty; \frac{-1}{2}] ; |e^x + \alpha_1| \leq \frac{1}{\sqrt{e}} |x - \alpha_1|$$

إذن من أجل:  $x = \beta_n$  المنتمي إلى  $]-\infty; \frac{-1}{2}]$  حسب (\*): نجد:

$$|e^{\beta_n} + \alpha_1| \leq \frac{1}{\sqrt{e}} |\beta_n - \alpha_1|$$

$$\Leftrightarrow |-e^{\beta_n} - \alpha_1| = |e^{\beta_n} + \alpha_1| \leq \frac{1}{\sqrt{e}} |\beta_n - \alpha_1|$$

$$\Leftrightarrow |\beta_{n+1} - \alpha_1| \leq \frac{1}{\sqrt{e}} |\beta_n - \alpha_1| \quad (777)$$

و بالتالي:  $(\exists a = \frac{1}{\sqrt{e}} \in \mathbb{R}) |\beta_{n+1} - \alpha_1| \leq a |\beta_n - \alpha_1|$

لدينا باستعمال النتيجة (777):

$$\Leftrightarrow |\beta_n - \alpha_1| \leq \frac{1}{\sqrt{e}} |\beta_{n-1} - \alpha_1|$$

$$\leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2 |\beta_{n-2} - \alpha_1|$$

$$\leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^3 |\beta_{n-3} - \alpha_1|$$

⋮ ⋮

$$\leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n |\beta_0 - \alpha_1|$$

إذن:  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |\beta_n - \alpha_1| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n \left|\frac{-1}{2} - \alpha_1\right|$

$$\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) ; |\beta_n - \alpha_1| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n \left|\frac{1}{2} + \alpha_1\right|$$

بما أن  $\alpha_1 < 0$  فإن:  $\left|\frac{1}{2} + \alpha_1\right| < \frac{1}{2}$

و منه:  $(1111) \quad (\forall n \in \mathbb{N}) ; |\beta_n - \alpha_1| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{n+1}$

نلاحظ أن:  $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{n+1}$  متتالية هندسية أساسها العدد الموجب

و الأصغر من 1:  $\frac{1}{\sqrt{e}}$

$$\text{إذن: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{n+1} = 0$$

و منه حسب التأطير (1111) نستنتج أن:  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\beta_n - \alpha_1| = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \alpha_1 \quad \text{أي:}$$