



استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول: (3,0 ن)

نعتبر في $(\mathbb{N}^*)^2$ المعادلة (E) الآتية: $(E) : x^2(x^2 + 7) = y(2x + y)$

ليكن (x, y) عنصرا من $(\mathbb{N}^*)^2$ و ليكن δ القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y

نضع: $x = \delta a$ و $y = \delta b$

① نفترض أن (x, y) حل للمعادلة (E).

أ) تحقق أن: $a^2(\delta^2 a^2 + 7) = b(2a + b)$ 0,50 ن

ب) إستنتج أنه يوجد عدد صحيح طبيعي k بحيث: $\delta^2 a^2 + 7 = kb$ و $2a + b = ka^2$ 0,50 ن

ج) بين أن: $a = 1$ 0,50 ن

د) إستنتج أن: $(b + 1)^2 = \delta^2 + 8$ 0,75 ن

② حل في $(\mathbb{N}^*)^2$ المعادلة (E). 0,75 ن

التمرين الثاني: (3,5 ن)

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j})

نعتبر المنحنى (E) الذي معادلته: $y = \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$

① أ) بين أن (E) جزء من إهليلج يتم تحديده. 0,50 ن

ب) أرسم المنحنى (E). 0,50 ن

② لتكن A و B النقطتين اللتين زوجا إحداثيتهما على التوالي هما: (4; 0) و (0; 3)

نعتبر النقطة M_1 من (E) التي أفسولها x_1 حيث x_1 ينتمي إلى المجال $[0; 4]$.

نضع: $x_1 = 4 \cos(t_1)$ حيث: $0 \leq t_1 \leq \frac{\pi}{2}$ و نعتبر التكامل الآتي: $I(x_1) = \frac{3}{4} \int_{x_1}^4 \sqrt{16 - x^2} dx$

أ) باستعمال المكاملة بتغيير المتغير و ذلك بوضع $x = 4 \cos(t)$ حيث: $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ 1,00 ن

بين أن: $I(x_1) = 6t_1 - 3 \sin(2t_1)$

ب) لتكن $S(x_1)$ مساحة السطح المحصور بين المستقيمين (OA) و (OM_1) و المنحنى (E). 0,75 ن

و لتكن S مساحة السطح المحصور بين المستقيمين (OA) و (OB) و المنحنى (E)

ب) تحقق أن أرتوب النقطة M_1 هو $3 \sin(t_1)$

0,25 ن

ج) أحسب $S(x_1)$ بدلالة t_1 .

0,25 ن

د) إستنتج قيمة S .

0,25 ن

و) بين أن : $S(x_1) = \frac{1}{2}S \Leftrightarrow t_1 = \frac{\pi}{4}$

0,25 ن

هـ) حدد إحداثيتي M_1 في المعلم $(O; \overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$ في حالة : $t_1 = \frac{\pi}{4}$

0,25 ن

التمرين الثالث : (4,5 ن)

الجزء الأول لكل (a, b) من \mathbb{R}^2 نعتبر المصفوفة : $M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} a+b & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

لتكن $E = \{M_{(a,b)} / (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$ مجموعة المصفوفات الآتية :

نذكر أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة واحدة.

1) بين أن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$ و من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$ 0,75 ن

2) بين أن : $(E, +, \times)$ حلقة تبادلية واحدة. 0,25 ن

3) أ) بين أن لكل عددين حقيقيين x و y لدينا : $(x^2 + xy + y^2 = 0) \Leftrightarrow (x = y = 0)$ 0,50 ن

ب) حدد العناصر التي تقبل مقلوبا في الحلقة $(E, +, \times)$ 0,25 ن

ج) إستنتج أن : $(E, +, \times)$ جسم تبادلي. 0,50 ن

الجزء الثاني ليكن σ عددا عقديا لا ينتمي إلى \mathbb{R} .

1) بين أن $(1, \sigma)$ أساس للفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ 0,25 ن

2) نعتبر التطبيق ψ المعرفة من E نحو \mathbb{C} بما يلي : 0,75 ن

$$\psi : E \rightarrow \mathbb{C}$$

$$M_{(a,b)} \rightarrow a + \sigma b$$

بين أن ψ تشاكل تقابلي من $(E, +)$ نحو $(\mathbb{C}, +)$

3) نعتبر في \mathbb{C} المعادلة : $z^2 - z + 1 = 0$ 0,75 ن

حل في مجموعة الأعداد العقدية هذه المعادلة و اكتب حلها على الشكل المتلثي

4) نفترض في هذا السؤال أن : $\sigma = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$ 0,50 ن

بين أن ψ تشاكل من (E, \times) نحو (\mathbb{C}, \times)

التمرين الرابع : (9,0 ن)

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ بما يلي : $f(x) = \frac{4 \ln x}{x^2} - \frac{1}{2}$

(I) وليكن (\mathcal{C}) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) وحدته : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2 \text{ cm}$

① أحسب : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم حدد الفرعين اللانهائيين للمنحنى (\mathcal{C}) ن 0,50

② (أ) بين أن : $f'(x) = 4 \left(\frac{1 - 2 \ln x}{x^3} \right)$; $\forall x \in]0; +\infty[$ ن 0,25

(ب) إعط جدول تغيرات الدالة f . ن 0,75

③ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل بالضبط حلين مختلفين α و β بحيث : $1 < \alpha < \sqrt{e} < \beta < 3$ ن 0,75

④ حدد معادلة المماس (T) للمنحنى (\mathcal{C}) في النقطة التي أفصولها 1 ن 0,50

⑤ أرسم (\mathcal{C}) ن 0,75

(II) ① بين أن : $\forall t \in [0; +\infty[; 1 - t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$ ن 0,25

② استنتج أن : $\forall a \in [0; +\infty[; a - \frac{a^2}{2} \leq \ln(1+a) \leq a$ ن 0,50

(III) لكل عدد صحيح n بحيث $n \geq 4$ نعتبر الدالة f_n المعرفة على $]0; +\infty[$ بما يلي : $f_n(x) = \frac{n \ln x}{x^2} - \frac{1}{2}$

وليكن (\mathcal{C}_n) المنحنى الممثل للدالة f_n في معلم متعامد ممنظم .

① أدرس تغيرات الدالة f_n . ن 0,50

② أدرس تقعر المنحنى (\mathcal{C}_n) و بين أنه يقبل نقطة انعطاف أفصولها $e^{\frac{5}{6}}$ ن 0,50

③ (أ) قارن $f_n(x)$ و $f_{n+1}(x)$ حسب قيم x . ن 0,25

(ب) استنتج الوضع النسبي للمنحنيين (\mathcal{C}_n) و (\mathcal{C}_{n+1}) . ن 0,25

④ بين أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل بالضبط حلين مختلفين u_n و v_n بحيث : $1 < u_n < \sqrt{e} < v_n$ ن 0,50

⑤ بين أن $(u_n)_{n \geq 4}$ متتالية تناقصية قطعاً مستعملاً نتيجة السؤال ③ ن 0,50

⑥ (أ) باستعمال (II) ② بين أن : $\frac{(u_n - 1)(3 - u_n)}{2} \leq \ln(u_n) \leq u_n - 1$; $(\forall n \geq 4)$ ن 0,25

(ب) استنتج أن : $\frac{(u_n)^2}{2n} \leq u_n - 1 \leq \frac{(u_n)^2}{n(3 - u_n)}$; $(\forall n \geq 4)$ ن 0,25

(ج) بين أن : $\frac{1}{2n} \leq u_n - 1 \leq \frac{e}{n}$; $(\forall n \geq 4)$ ن 0,25

(د) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 4}$ متقاربة محددًا نهايتها ن 0,50

⑦ (أ) بين أن : $e^{\frac{5}{6}} < v_n$; $(\forall n \geq 4)$ ن 0,50

(ب) استنتج أن : $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = +\infty$ ن 0,50