

تمرين 1 :

$$v_n = u_n + \frac{1}{n} \text{ و } u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

$$\text{لدينا : } \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0 \text{ و } v_n > u_n \text{ منه } v_n - u_n = \frac{1}{n}$$

$$\text{و : } 0 < u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0 \text{ إذن } u_n \text{ تزايدية قطعاً}$$

ولدينا :

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{n+1} - u_n - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{-1}{n(n+1)} = \frac{n - (n+1)}{n(n+1)^2} = \frac{-1}{n(n+1)^2} < 0$$

إذن v_n تناقصية قطعاً، بالتالي u_n و v_n متحاذيتان.

1

$$v_n = u_n + \frac{1}{nn!} \text{ و } u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

$$\text{لدينا : } \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0 \text{ و } v_n > u_n \text{ منه } v_n - u_n = \frac{1}{nn!} > 0 \text{ (لأن } 0 < \frac{1}{nn!} \leq \frac{1}{n} \text{)}$$

$$\text{و : } 0 < u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0 \text{ إذن } u_n \text{ تزايدية قطعاً}$$

2

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - u_n - \frac{1}{nn!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{nn!}$$

$$= \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!} = \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0$$

ولدينا :

إذن v_n تناقصية قطعاً، بالتالي u_n و v_n متحاذيتان.

$$\text{تمرين 2 : } \begin{cases} u_0 = a ; v_0 = b \\ u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} , v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \text{ حيث } b > a > 0$$

بالنسبة لـ : $n=0$: $0 < u_0 \leq v_0$: لأن $b > a > 0$

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} = \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)} \geq 0 \text{ و } u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} > 0 \text{ منه : } 0 < u_n \leq v_n$$

1

إذن : $0 < u_{n+1} \leq v_{n+1}$

$$\text{لدينا : } v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + v_n}{2} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2} \leq 0 \text{ إذن } v_n \text{ تناقصية}$$

2

$$\text{لدينا } u_n \text{ تزايدية } u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} - u_n = \frac{u_n v_n - u_n^2}{u_n + v_n} = \frac{u_n (v_n - u_n)}{u_n + v_n} > 0$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{v_{n+1} - u_{n+1}}{v_n - u_n} = \frac{u_n - v_n}{2(u_n + v_n)} < \frac{1}{2} \text{ و } \forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < v_{n+1} - u_{n+1}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2} (v_n - u_n) \text{ بالتالي}$$

3

🍏 (سبق وحسبنا الفرق $v_{n+1} - u_{n+1}$ وأيضاً $\frac{u_n - v_n}{u_n + v_n} < 1$ لأن البسط أصغر من المقام)

	<p>لدينا : $0 \leq v_1 - u_1 \leq \frac{1}{2} (v_0 - u_0)$ و $0 \leq v_2 - u_2 \leq \frac{1}{2} (v_1 - u_1)$ و \dots و $0 \leq v_n - u_n \leq \frac{1}{2} (v_{n-1} - u_{n-1})$</p> <p>بضرب المتفاوتات و الاختزال نجد : $0 \leq v_n - u_n \leq \frac{1}{2^n} (v_0 - u_0)$ أي $0 \leq v_n - u_n \leq \frac{1}{2^n} (b - a)$</p>	4
	<p>لدينا $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$ (لأن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} (b - a) = 0$)</p> <p>و v_n تناقصية و u_n تزايدية، إذن v_n و u_n متقاربتان</p>	5
	<p>لدينا : $w_n = v_n = u_n$ إذن $w_{n+1} = u_{n+1} v_{n+1} = u_n v_n = w_n$ متتالية ثابتة</p>	أ
	<p>لدينا w_n متتالية ثابتة إذن : $\forall n \in \mathbb{N} w_n = w_0 = ab$ ، منه : $\forall n \in \mathbb{N} u_n v_n = ab$</p> <p>بما أن u_n و v_n متقاربتان نضع : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$</p> <p>من $\forall n \in \mathbb{N} u_n v_n = ab$ نستنتج أن : $\ell^2 = ab$ منه : $\ell = \sqrt{ab}$ أو $\ell = -\sqrt{ab}$</p> <p>ولكون : $0 < u_n$ فإن : $\ell \geq 0$ بالتالي : $\ell = \sqrt{ab}$</p>	ب 6
	<p>تمرين 3 : $v_n = u_n + \frac{1}{nn!}$ و $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$</p>	
	<p>أنظر السؤال الثاني من التمرين الأول</p>	1
	<p>نضع $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$ ونفترض أن ℓ عدد جذري أي $\ell = \frac{p}{q}$ حيث $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$</p> <p>لدينا u_n و v_n متحاذيتان نهايتهما ℓ</p> <p>إذن : $\forall n \in \mathbb{N}^* u_n < \ell < v_n$ منه : $u_q < \ell < v_q$ منه : $u_q < \frac{p}{q} < u_q + \frac{1}{qq!}$ منه : $0 < \frac{p}{q} - u_q < \frac{1}{qq!}$</p>	أ 2
	<p>لدينا : $\frac{p}{q} - u_q = \frac{p}{q} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{q!}\right) = \frac{p(q-1)! - q! - q! - \frac{q!}{2} - \frac{q!}{3} - \dots - \frac{q!}{q}}{q!}$</p> <p>وبما أن $\forall k \in \{1, \dots, q\} \frac{q!}{k} \in \mathbb{N}$ فإن : كسر مقامه $q!$ وبسطه عدد صحيح نسبي</p>	ب
	<p>لدينا : $\frac{p}{q} - u_q = \frac{a}{q!} / a \in \mathbb{Z}$ و $0 < \frac{p}{q} - u_q < \frac{1}{qq!}$ منه : $0 < \frac{a}{q!} < \frac{1}{qq!}$ منه : $0 < qa < 1$</p> <p>وهذا غير ممكن لأنه لا يوجد عدد صحيح نسبي محصور بين 0 و 1</p> <p>بالتالي أن $\ell \notin \mathbb{Q}$</p>	3