

سلسلة 1	المتاليات العددية حلول مقترحة	السنة 2 بكالوريا علوم رياضية
تمرين 1: $v_n = n\sqrt{n}$ و $u_n = \frac{\sqrt{n+1}}{2\sqrt{n}}$		
<p style="text-align: right;">لنبين باستعمال التعريف أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$</p> <p style="text-align: right;">لدينا: $\left u_n - \frac{1}{2} \right = \frac{1}{2\sqrt{n}}$: منه $u_n - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{n+1}}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}}$</p> <p style="text-align: right;">ليكن: $\varepsilon > 0$ ، لدينا: $\frac{1}{2\sqrt{n}} < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{n} > \frac{1}{2\varepsilon} \Leftrightarrow n > \left(\frac{1}{2\varepsilon}\right)^2$</p> <p style="text-align: right;">إذن بوضع: $n_0 = E\left(\frac{1}{4\varepsilon^2}\right) + 1$ نستنتج أن:</p> <p style="text-align: right;">$n \geq n_0 \Rightarrow n \geq E\left(\frac{1}{4\varepsilon^2}\right) + 1 \Rightarrow n > \frac{1}{4\varepsilon^2} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{n}} < \varepsilon \Rightarrow \left u_n - \frac{1}{2} \right < \varepsilon$</p> <p style="text-align: right;">بالتالي: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$ ، $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} ; \left(n \geq n_0 \Rightarrow \left u_n - \frac{1}{2} \right < \varepsilon \right)$ بالتالي:</p>		
<p style="text-align: right;">لنبين باستعمال التعريف أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$</p> <p style="text-align: right;">ليكن $A > 0$ ، لدينا: $v_n > A \Leftrightarrow n\sqrt{n} > A \Leftrightarrow n^3 > A^2 \Leftrightarrow n > \sqrt[3]{A^2}$</p> <p style="text-align: right;">إذن بوضع: $n_0 = E\left(\sqrt[3]{A^2}\right) + 1$ نستنتج أن: $n \geq n_0 \Rightarrow n \geq E\left(\sqrt[3]{A^2}\right) + 1 \Rightarrow n > \sqrt[3]{A^2} \Rightarrow v_n > A$</p> <p style="text-align: right;">بالتالي: $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$</p> <p style="text-align: right;">تمرين يستهدف استيعاب التعريف الرياضي لنهاية متتالية، فرغم قلة استعماله في جل التمارين إلا أنه يعد من أهم المفاهيم الرياضية التي تنبني عليها جل القواعد اللاحقة (مصاديق التقارب،...)، المثالان بسيطان، لكن استيعابهما سيسمح بفهم أكثر لمفهوم نهاية متتالية، حيث أن جل التلاميذ يستطيعون حساب نهاية متتالية دون إدراكهم الفعلي بهذا المفهوم.</p>		
تمرين 2:		
$\left(\left \frac{\sqrt{3}}{2}\right < 1 \text{ و } \left \frac{2}{3}\right < 1\right)$ (لأن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = 0 + 0 = 0$)	$a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$	
$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2007^n - 2008^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2008^n \left(\left(\frac{2007}{2008}\right)^n - 1 \right) = -\infty$	$b_n = 2007^n - 2008^n$	
$\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-2)^n + 1}{5^n + 7} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-2)^n + 1}{5^n} = \frac{0 + 0}{1 + 7 \times 0} = 0$	$c_n = \frac{(-2)^n + 1}{5^n + 7}$	
$\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2^n} + \sqrt{3^n}}{\sqrt{2^n} + 3^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\sqrt{2^n} + \sqrt{3^n}}{(\sqrt{3})^n}}{\frac{\sqrt{2^n} + 3^n}{(\sqrt{3})^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^n + 1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1} = \frac{0 + 1}{\sqrt{0} + 1} = 1$	$d_n = \frac{\sqrt{2^n} + \sqrt{3^n}}{\sqrt{2^n} + 3^n}$	

$\lim_{n \rightarrow +\infty} e_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^0 + \left(\frac{2}{3} \right)^1 + \left(\frac{2}{3} \right)^2 + \left(\frac{2}{3} \right)^3 + \dots + \frac{2^n}{3^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$	$e_n = 1 + \frac{2}{3} + \dots + \frac{2^n}{3^n}$
<p>بملاحظة أن: $\forall n \in \mathbb{N} \mid f_n \leq \left(\frac{2}{3} \right)^n$ وأن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n = 0$</p> <p>فحسب مصاديق تقارب متتالية نستنتج أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = 0$</p>	$f_n = \left(\frac{2}{3} \right)^n \sin(7^n)$
<p>بملاحظة أن: $\forall n \in \mathbb{N} \ u_n \geq n-1$ (لأن: $\forall x \in \mathbb{R} - \sin(x) \geq -1$)</p> <p>وأن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ فحسب مصاديق تقارب متتالية نستنتج أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$</p>	$u_n = n - \sin(n^5)$
<p>لدينا: $\forall n \in \mathbb{N} \ v_n = \frac{1 + \frac{\sin n}{7^n}}{1 + \frac{\cos(5^n)}{7^n}} = \frac{1+0}{1+0} = 1$</p> <p>(لأن: $\forall n \in \mathbb{N} \ \left \frac{\sin n}{7^n} \right \leq \left(\frac{1}{7} \right)^n$ و $\forall n \in \mathbb{N} \ \left \frac{\cos(5^n)}{7^n} \right \leq \left(\frac{1}{7} \right)^n$)</p>	$v_n = \frac{7^n + \sin n}{7^n + \cos(5^n)}$
<p>بملاحظة أن: $\forall n \in \mathbb{N}^* \ w_n \geq n$ (لأن: $\forall n \in \mathbb{N} (n \geq 1 \Rightarrow n^n \geq n^1)$)</p> <p>وأن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ فحسب مصاديق تقارب متتالية نستنتج أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = +\infty$</p>	$w_n = n^n$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n+1)}{2} = +\infty$	$x_n = 1+2+3+\dots+n$

تذكر أن: $|a| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0$ و $a > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = +\infty$ $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ ، $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$ $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell$ $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \ell$

تمرين 3: $u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$

لدينا: $\forall n \in \mathbb{N} \ \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \sqrt{n+1} = \frac{\sqrt{n^2+n+1} - n - 1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n^2+n} - n}{\sqrt{n+1}} = \frac{n}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n^2+n} + n)} \geq 0$

إذن: $\forall n \in \mathbb{N} \ \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n+1}$

لدينا حسب السؤال السابق: $\forall n \in \mathbb{N} \ \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ ، إذن: $\frac{1}{\sqrt{2}} \geq \sqrt{2} - \sqrt{1}$ و $\frac{1}{\sqrt{3}} \geq \sqrt{3} - \sqrt{2}$ و ... و $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$

بجمع هذه المتفاوتات طرفا بطرف نجد: $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$

منه: $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$ بالتالي $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n} - 1$

بالتالي: $\forall n \in \mathbb{N}^* \ u_n \geq \sqrt{n}$

بما أن $\forall n \in \mathbb{N}^* \ u_n \geq \sqrt{n}$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ فإن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

تمرين توليفي لمتتاليات معرفة على شكل مجموع (سلسلة متتاليات)

تمرين 4: $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ لكل $n \in \mathbb{N}^*$

$u_2 = \frac{1}{\sqrt{2^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{2^2+2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{6\sqrt{5} + 5\sqrt{6}}{30}$ ، $u_1 = \frac{1}{\sqrt{1^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{3^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{3^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{3^2+3}} = \frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{11}} + \frac{1}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{10}}{10} + \frac{\sqrt{11}}{11} + \frac{\sqrt{12}}{12}$$

الهدف من هذا السؤال هو فهم طبيعة المتتالية وليس الحساب

لنبين أن $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ ، $\forall n \in \mathbb{N}^*$ لدينا لكل عدد صحيح طبيعي k :

$$1 \leq k \leq n \Rightarrow n^2+1 \leq n^2+k \leq n^2+n \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

إذن: $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \dots \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ و $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

بجمع المتفاوتات طرفاً بطرف نجد: $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

يمكن استعمال الرمز \sum للتعبير عن المجموع وجمع أطراف المتفاوتات، لكننا أثرنا كتابة متفاوتات بعد تعويض k بقيم من 1 إلى n حتى يكون الحساب مفهوماً.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{n^2}{n^2+1}} = \sqrt{1} = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{n^2}{n^2+n}} = \sqrt{1} = 1$$

فإن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

المتتالية u_n تكتب اختصاراً $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{\sqrt{n^2+k}}$ ، نذكر أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_n x^m + b_{n-1} x^{m-1} + \dots + b_0} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n x^n}{b_n x^m}$

تمرين 5: $u_n = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n \times (n+1)}$

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1 - 0 = 1$$

تمرين سهل، لكنه صعب بغياب السؤال الأول. من الأفضل تذكر متساوية السؤال الأول فهي جد مفيدة في كثير من الأسئلة.

تمرين 6: $u_n = \frac{E(\pi) + E(2\pi) + E(3\pi) + \dots + E(n\pi)}{n^2}$

لدينا: $\forall k \in \mathbb{N} \quad k\pi - 1 < E(k\pi) \leq k\pi$ ، إذن: $\sum_{k=1}^n (k\pi - 1) < \sum_{k=1}^n E(k\pi) \leq \sum_{k=1}^n k\pi$

(قمنا بجمع المتفاوتات المحصل عليها بعد تطبيق العبارة السابقة على كل من 1, 2, 3, ..., n)

$$\pi \frac{n(n+1)}{2} - n < \sum_{k=1}^n E(k\pi) \leq \pi \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{منه:} \quad \pi \left(\sum_{k=1}^n k \right) - n < \sum_{k=1}^n E(k\pi) \leq \pi \sum_{k=1}^n k$$

$$\pi \frac{(n+1)}{2n} - \frac{1}{n} < u_n \leq \pi \frac{(n+1)}{2n} \quad \text{أي} \quad \pi \frac{(n+1)}{2n} - \frac{1}{n} < \frac{\sum_{k=1}^n E(k\pi)}{n^2} \leq \pi \frac{(n+1)}{2n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{\pi}{2} \quad \text{فإن:} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \pi \frac{(n+1)}{2n} - \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \pi \frac{(n+1)}{2n} = \frac{\pi}{2}$$

للتذكير: $\forall x \in \mathbb{R} \quad x-1 < E(x) \leq x$ أو $\forall x \in \mathbb{R} \quad E(x) \leq x < E(x)+1$