

التمرين الأول :

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n \geq 1}$ المعرفة بما يلي : $U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2}$

بين أن $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$ ($\forall k \geq 2$) و استنتج أن المتتالية $(U_n)_{n \geq 1}$ مكبورة

التمرين الثاني :

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n \geq 1}$ المعرفة بما يلي : $U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{n+k}$

(1) بين أن $U_n \geq \frac{1}{2}$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$)

(2) أدرس رتبة المتتالية $(U_n)_{n \geq 1}$

(3) بين أن المتتالية $(U_n)_{n \geq 1}$ متقاربة

التمرين الثالث :

نعتبر المتتالية $(x_n)_n$ المعرفة بما يلي : $x_0 = 1$ و $x_{n+1} = \sqrt[3]{1 + \frac{1}{2}x_n^3}$

(1) بين أن $0 < x_n < 2$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

(2) بين أن المتتالية $(x_n)_n$ تزايدية و استنتج أنها متقاربة

(3) نضع $U_n = x_n^3 - 2$ بين أن $(U_n)_n$ متتالية هندسية و حدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$

التمرين الرابع :

ليكن n من \mathbb{N}^* ، نعتبر الدالة F_n المعرفة على المجال $[0,1]$ بما يلي : $F_n(x) = x^3 + nx - n$

(1) بين أن $F_n(a_n) = 0$ ($\exists! a_n \in]0,1[$)

(2) أدرس رتبة المتتالية $(a_n)_n$ و استنتج أنها متقاربة

(3) حدد إشارة $F_n\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ و استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$

التمرين الخامس :

حدد نهاية المتتالية $(U_n)_n$ في كل من الحالات التالية :

$$U_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{k=n} k \quad , \quad x \in \mathbb{R}^* \quad \text{و} \quad U_n = 2^n \sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \quad , \quad U_n = 5 \times 3^{n+1} - 2 \times 5^n$$

$$U_n = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{4p^2 - 1} \quad , \quad U_0 \in \mathbb{R}^+ \quad \text{و} \quad U_{n+1} \geq 2U_n \quad , \quad U_n = \sum_{k=2}^{k=n} \frac{2}{k^2 - 1}$$

$$U_n = \frac{2^n}{n^3} \quad , \quad U_n = \sin^2\left(\pi\sqrt{n^2 + n}\right) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^* \quad \text{و} \quad U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} E(kx)$$

$$U_n = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{\sqrt{p+1} + \sqrt{p}} \quad , \quad U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{1 + \sqrt{kn}} \quad , \quad U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^{k+1}}{3^k} \quad , \quad U_n = \frac{\sqrt{n}}{2^n}$$

التمرين السادس:

نضع $S_n = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{\sqrt{p}}$ و نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي : $U_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}}$

$$(1) \quad \text{بين أن } (\forall p \in \mathbb{N}^*) \quad 2(\sqrt{p+1} - \sqrt{p}) \leq \frac{1}{\sqrt{p}}$$

$$(2) \quad \text{استنتج أن } (\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad S_n \geq 2\sqrt{n+1} - 2 \quad \text{و حدد } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$$

$$(3) \quad \text{بين بالترجع أن } (\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad S_n \leq \sqrt{n} + \sqrt{n-1} \quad \text{و استنتج } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$$

التمرين السابع:

نعتبر الدالة F_n المعرفة على المجال \mathbb{R}^+ بما يلي : $F_n(x) = 2x^3 - x^2 + 2(n+1)x - 1$ و $n \in \mathbb{N}^*$

$$(1) \quad \text{بين أن } (\exists! a_n \in]0,1[) \quad F_n(a_n) = 0$$

$$(2) \quad \text{أ- أدرس إشارة } F_{n+1}(x) - F_n(x)$$

ب- أدرس رتبة المتتالية $(a_n)_n$ و استنتج أنها متقاربة

$$(3) \quad \text{بين أن } (\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad a_n \leq \frac{1}{n+1} \quad \text{و استنتج } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$$

التمرين الثامن:

لكل n من \mathbb{N}^* ، نعتبر الدالة F_n المعرفة على المجال $]0,1[$ بما يلي : $F_n(x) = (1-x)(x+1)^n$

$$(1) \quad \text{أدرس منى تغيرات الدالة } F_n$$

$$(2) \quad \text{بين أن المعادلة } F_n(x) = 1 \quad \text{تقبل حلا وحيدا } x_n$$

$$(3) \quad \text{أ- بين أن } (\forall x \in]0,1[) \quad F_{n+1}(x) < F_n(x)$$

$$\text{ب- بين أن } (\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad x_{n+1} \in \left] \frac{n-1}{n+1}, 1 \right[\quad \text{ثم استنتج رتبة المتتالية } (x_n)_n$$

$$\text{ج- حدد } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$$

التمرين التاسع:

لتكن $(U_n)_n$ متتالية معرفة بما يلي : $U_0 = 0$ و $U_{n+1} = U_n^2 + 3U_n + 1$

$$(1) \quad \text{أحسب } U_1 \quad \text{و بين أن } (U_n)_n \quad \text{تزايدية}$$

$$(2) \quad \text{أ- بين أن } (\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_{n+1} \geq 3U_n$$

$$\text{ب- بين أن } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$$

$$(1) \quad \text{نضع } S_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{2+U_k} \quad \text{لكل عدد طبيعي } n$$

$$\text{أ- تحقق أن } (\forall k \in \mathbb{N}) \quad \frac{1}{1+U_k} - \frac{1}{1+U_{k+1}} = \frac{1}{2+U_k}$$

ب- بسط S_n ثم استنتج أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1$

التمرين العاشر:

التمرين العاشر:

نعتبر الدالة f_n المعرفة على \mathbb{R}^+ بما يلي : $f_n(x) = \arctan\left(\frac{x}{n}\right) + 2x - 1$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$

(1) أدرس رتبة الدالة f_n

(2) بين أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا b_n و أن $b_n < \frac{1}{2}$

(3) أدرس إشارة $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ و استنتج رتبة المتتالية (b_n)

(4) حدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_n}{n}$ و استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$

التمرين الحادي عشر:

التمرين الحادي عشر:

لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي : $g(x) = \frac{1}{x} - 2 \arctan x$

(1) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا a و أن $\frac{\sqrt{3}}{3} < a < 1$

ب- استنتج إشارة $g(x)$

(2) نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x) = \frac{\arctan x}{x^2 + 1}$

أ- أدرس منحنى تغيرات الدالة f على $]0, +\infty[$ و تحقق أن $f(a) = \frac{1}{2a(a^2 + 1)}$

ب- بين أن $(\forall x \in \mathbb{R}^+) 0 \leq f(x) \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$

(3) بتطبيق مبرهنة التزايديات المنتهية بين أن :

$$(\forall (x, x_0) \in \mathbb{R}^{+2}) / x > x_0 : (\arctan x)^2 - (\arctan x_0)^2 \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}(x - x_0)$$

(4) ليكن x من \mathbb{R}^+ و نضع $U_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n} \left(\arctan \frac{x}{2^k}\right)^2$

أ- بين أن $(U_n(x))_n$ مكبورة بالعدد $\frac{3\sqrt{3}}{2}x$ و استنتج أنها متقاربة

ب- نضع $L(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n(x)$

(i) بين أن $(\forall (x, x_0) \in \mathbb{R}^{+2}) |U_n(x) - U_n(x_0)| \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}|x - x_0| \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{2^k}$

(ii) استنتج أن الدالة L متصلة على \mathbb{R}^+