

**تمرين 1**

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n - 3}{4 - u_n} \end{cases}$$

(1) بين : أن  $(\forall n \in \mathbb{N}) : -1 \leq u_n \leq 3$

(2) ادرس رتبة المتتالية  $(u_n)$

(3) استنتج أن  $(u_n)$  متقاربة واحسب  $\lim u_n$ .

(4) نعتبر المتتالية  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة بما يلي  $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n + 1}$ .

(a) بين أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية حدد أساسها وحدها الأول.

(b) احسب  $(v_n)$  ثم  $(u_n)$  بدلالة  $n$  واستنتج  $\lim u_n$  و  $\lim v_n$ .

(c) أحسب  $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$  و  $\lim S_n$ .

(d) أحسب  $P_n = v_0 \cdot v_1 \cdot \dots \cdot v_n$

**تمرين 2**

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{3}{\sqrt{6 - u_n^2}} \end{cases}$$

(1) بين : أن  $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq u_n < \sqrt{3}$

(2) ادرس رتبة المتتالية  $(u_n)$

(3) نعتبر المتتالية  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة بما يلي  $v_n = \frac{u_n^2}{3 - u_n^2}$ .

(a) بين أن المتتالية  $(v_n)$  حسابية حدد أساسها وحدها الأول.

(b) احسب  $(v_n)$  ثم  $(u_n)$  بدلالة  $n$  واستنتج  $\lim u_n$ .

**تمرين 3**

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt[3]{\frac{1}{3}u_n^3 + 2} \end{cases}$$

ونعتبر المتتالية  $v_n = u_n^3 - 3$

(1) بين : أن  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n \geq \sqrt[3]{3}$

(2) ادرس رتبة المتتالية  $(u_n)$

(3) استنتج أن  $(u_n)$  متقاربة واحسب  $\lim u_n$ .

(4) بين أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية (a) احسب  $(v_n)$  ثم  $(u_n)$  بدلالة  $n$

(c) أحسب  $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$  و  $\lim S_n$ .

(d) أحسب  $P_n = v_0 \cdot v_1 \cdot \dots \cdot v_n$

**تمرين 4**

$$\begin{cases} u_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{\frac{1 - u_n}{2}} \end{cases}$$

(1) بين : أن  $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 < u_n < 1$

$$v_n = \frac{\pi}{3} - \arccos(u_n)$$

(3) نعتبر المتتالية  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة بما يلي

$$(\forall x \in [0, 1]) : \arccos \sqrt{\frac{1-x}{2}} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arccos(x)$$

(b) بين أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية وحدد أساسها وحدها الأول.

(c) احسب  $(v_n)$  ثم  $(u_n)$  بدلالة  $n$ .

**تمرين 5**

نعتبر المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة بما يلي  $\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 4(u_{n+1} - u_n) \end{cases}$  ونضع  $v_n = \frac{u_n}{2^n}$

(1) بين أن المتتالية  $(v_n)$  حسابية وحدد أساسها وحدها الأول .  
 (2) احسب  $v_n$  ثم  $u_n$  بدلالة  $n$  واستنتج  $\lim u_n$  .

**تمرين 6**

ليكن  $\alpha \in ]0, \pi[$

نعتبر المتتالية  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة بما يلي:  $P_n = \sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{\alpha}{2^k}\right)$

(1) بين أن المتتالية  $(P_n)$  هندسية حدد أساسها وحدها الأول .  
 (2) استنتج  $\prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{\alpha}{2^k}\right)$  بدلالة  $n$  ,

**تمرين 7**

نعتبر المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة بما يلي:  $u_{n+1} = \frac{u_n^3 + 2}{u_n^2 + 1}$  و  $u_0 = 1$

(1) بين أن  $0 < u_n < 2$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ) . (2) ادرس رتبة المتتالية  $(u_n)$  .  
 (3) استنتج أن  $(u_n)$  متقاربة واحسب  $\lim u_n$  .  
 (4) بين أن  $(\forall n \in \mathbb{N}) : 2 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(2 - u_n)$  .  
 (b) استنتج بطريقة أخرى أن  $(u_n)$  متقاربة واحسب  $\lim u_n$   
 (5) نضع  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$  . بين أن  $(\forall n \in \mathbb{N}) : S_n \geq 2n - 3 + 5\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$  واحسب  $\lim S_n$

**تمرين 8**

نعتبر المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة بما يلي :  $u_{n+1} = 1 - \sqrt[3]{5 - 3u_n}$  و  $u_0 = -\frac{1}{3}$

(1) بين أن  $-1 < u_n < 0$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ) .  
 (2) ادرس رتبة المتتالية  $(u_n)$  .  
 (3) استنتج أن  $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 < u_n + 1 < \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \frac{2}{3}$  .  
 (b) استنتج أن  $(u_n)$  متقاربة واحسب  $\lim u_n$  .

**تمرين 9**

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة بما يلي :  $f(x) = \frac{6x}{x^3 + 4}$

(1) حدد مجموعة تعريف الدالة  $f$  .  
 (2) بين أن  $f$  تقابل من  $[0, \sqrt[3]{2}]$  نحو مجال يجب تحديده .  
 (3) نعتبر المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة بما يلي :  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

(a) بين أن  $1 \leq u_n < \sqrt[3]{2}$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ) .  
 (b) بين أن  $(u_n)$  تزايدية واستنتج أنها مقاربة واحسب  $\lim u_n$  .

**تمرين 10**

نعتبر المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة بما يلي:  $u_{n+1} = \frac{2(n^2 + n + 1) + nu_n}{(n+1)^2}$  و  $u_1 = \alpha \in \mathbb{R}$

(1) بين أن  $(u_n)$  رتيبة ومحدودة واحسب نهايتها  $l$  .  
 (2) أحسب  $u_{n+1} - l$  بدلالة  $u_n - l$  واستنتج  $u_n$  بدلالة  $n$  و  $\alpha$  .

**تمرين 11**

(1) نعتبر المتتالية  $(u_n)_{n \geq 1}$  المعرفة بما يلي :  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k}$

بين أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة واحسب نهايتها .

(2) نفس السؤال بالنسبة لـ  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  بحيث  $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k} + 1}$

**تمرين 12**

نعتبر المتتالية  $(u_n)_{n \geq 1}$  المعرفة بما يلي :  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$

(1) بين أن  $\lim u_n = +\infty$

(2) بين أن  $(\forall k \geq 1) : 2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k} \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{k} - 2\sqrt{k-1}$  واستنتج  $E(u_{10^6})$  .

**تمرين 13**

(1) بين أنه إذا كانت  $(u_n)$  متتالية تزايدية وغير مكبورة فإن  $\lim u_n = +\infty$

(2) نعتبر المتتالية  $(u_n)_{n \geq 1}$  المعرفة بما يلي :  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

(a) بين أن  $(\forall n \geq 1) : u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$

(b) واستنتج أن  $\lim u_n = +\infty$

(c) بين أن  $u_{1024} \geq 6$  واستنتج عدد طبيعي  $n$  بحيث  $u_n \geq 1000$

**تمرين 14**

نعتبر المتتالية  $(u_n)$  المعرفة بما يلي :  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^k}$

(1) بين أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة لتكن  $l$  نهايتها .

(2) بين أن  $0 \leq l - u_N \leq \frac{1}{N(N+1)^N}$  لكل  $N$  من  $\mathbb{N}^*$

(3) استنتج قيمة مقربة للعدد  $l$  بالدقة  $10^{-4}$

**تمرين 15**

نعتبر المتتالية  $(u_n)$  المعرفة بما يلي :  $u_0 = 0$  و  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = \frac{1+u_n}{2^n}$

(1) بين أن  $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq u_n \leq 1$  واستنتج أن  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n \leq \frac{1}{2^{n-2}}$

(2) بين أن  $(u_n)$  متقاربة واحسب  $\lim u_n$

(3) بين أن  $(\forall n \geq 2) : u_n > \frac{1}{2^n - 1}$  استنتج أن المتتالية  $(u_n)_{n \geq 2}$  تناقصية قطعاً .

**تمرين 16**

لتكن  $(a_n)_{n \geq 0}$  متتالية عددية نضع  $b_n = \frac{a_0 + 2a_1 + 4a_2 + \dots + 2^n a_n}{2^{n+1}}$

بين ما يلي :

(1) إذا كانت  $(a_n)$  تزايدية وموجبة فإن  $(b_n)$  تزايدية .

(2) إذا كانت  $(a_n)$  مكبورة بـ  $M \geq 0$  فإن  $(b_n)$  مكبورة بـ  $M$

(3) إذا كانت  $(a_n)$  تتوّل إلى 0 فإن  $(b_n)$  تتوّل إلى 0 .

(4) إذا كانت  $(a_n)$  تتوّل إلى  $l$  فإن  $(b_n)$  تتوّل إلى  $l$  .

### تمرين 17

نعتبر المتتالية  $(u_n)$  المعرفة بما يلي :  $u_0 \geq 2$  و  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = u_n^2 - \frac{2n}{n+1}$

- (1) بين أن  $u_n \geq 4$  ( $\forall n \geq 1$ ) واستنتج أن  $(u_n)$  غير متقاربة .
- (2) (a)  $(\forall n \geq 0) : u_{n+1} - u_n \geq (u_n + 1)(u_n - 2)$   
(b) استنتج أن  $(u_n)$  تزايدية .
- (3) هل المتتالية  $(u_n)$  مكبورة ؟

### تمرين 18

(1) بين أن لكل  $n \geq 1$  المعادلة  $x^n + x^{n-1} + \dots + x^2 + x - \frac{n+1}{n} = 0$  تقبل حلا وحيدا في  $\mathbb{R}^+$  وأن

$$u_n \in ]0, 1[$$

- (2) بين أن المتتالية  $(u_n)$  تناصية .
- (3) بين أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة واحسب  $\lim u_n$  .

### تمرين 19

نعتبر الدالة :  $f(x) = 2x^3 + x - 1$

- (1) ادرس تغيرات  $f$  . واستنتج أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  بحيث  $0 < \alpha < 1$  .
- (2) نعتبر المتتاليتين  $(u_n)$  ,  $(v_n)$  , المعرفتين بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \text{ et } v_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ si } f\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right) > 0 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } v_{n+1} = v_n \text{ si } f\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right) < 0 \end{cases}$$

- (a) احسب  $u_2, v_2, u_1, v_1$  .
- (b) بين أن  $0 \leq u_n \leq 1$  و  $0 \leq v_n \leq 1$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$  .
- (c) بين أن  $(u_n)$  مكبورة بالعدد  $\alpha$  و  $(v_n)$  مصغورة بالعدد  $\alpha$  .
- (d) بين أن  $(u_n)$  ,  $(v_n)$  متحاديتان وحدد نهايتهما .

### تمرين 20

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة بما يلي :  $f(x) = \frac{1}{4x^2 + 4}$

ونعتبر المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة بما يلي :  $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

- (1) (a) ادرس تغيرات  $f$  على  $\mathbb{R}^+$  .  
(b) بين أن المعادلة  $f(x) = x$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha \in ]0, \frac{1}{2}[$

(c) بين أن  $(\forall (x, y) \in [0, 1]^2) : |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|$

(2) بين أن  $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 < u_n \leq \frac{1}{2}$

(3) (a) بين أن  $(\forall n \in \mathbb{N}) : |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

(b) استنتج أن المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متقاربة واحسب نهايتها .

(4) نضع  $w_n = u_{2n+1}$  و  $v_n = u_{2n}$

(a) بين أن  $(\forall n \in \mathbb{N}) w_n < \alpha < v_n$

(b) ادرس رتبة  $(v_n)$  و  $(w_n)$

(3) (a) بين أن :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_{n+1} - w_{n+1} \leq \frac{1}{4}(v_n - w_n)$ .

(b) بين أن  $(v_n)$  و  $(w_n)$  متحاديتان وحدد نهايتهما المشتركة .

### تمرين 21

نعتبر المتتاليتين  $v_n, u_n$  المعرفتين بما يلي :

$$\begin{cases} u_1 = 1 & \text{et} & v_1 = 6 \\ u_{n+1} = \frac{5u_n + v_n}{6} & \text{et} & v_{n+1} = \frac{u_n + (\alpha - 1)v_n}{\alpha} \quad (\alpha > \frac{6}{5}) \end{cases}$$

(1) بين أن  $u_n < v_n$  ( $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ) وأن  $(u_n)$  تزايدية و  $(v_n)$  تناقصية .

(2) بين أن  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 0 < v_{n+1} - u_{n+1} < \frac{5}{6}(v_n - u_n)$  واستنتج أن  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متحاديتان .

(3) بين أن  $6\alpha u_{n+2} - (11\alpha - 6)u_{n+1} + (5\alpha - 6)u_n = 0$  واستنتج  $u_n$  ثم  $v_n$  بدلالة  $\alpha$  و  $n$  .

### تمرين 22

$$\begin{cases} u_0 = a & v_0 = b \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} & v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases} : \text{ نعتبر المتتاليتين } (u_n), (v_n) \text{ المعرفتين بما يلي :}$$

(1) بين أن  $(u_n)$  ;  $(v_n)$  متحاديتان .

(2) بين أن  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{8a}(v_n - u_n)^2$

(3) استنتج تأطير كل من العددين  $l - v_n$  و  $l - u_n$  حيث  $l = \lim u_n = \lim v_n$

### تمرين 23

لكل  $n$  من  $\mathbb{N}^*$  نعتبر الدالة  $f_n$  المعرفة على  $\mathbb{R}^+$  بمايلي :  $f_n(x) = 3x^n - x - 1$

(1) (a) بين أن  $f_n$  تزايدية على  $\left[ \sqrt[n-1]{\frac{1}{3n}}, +\infty \right[$  وتناقصية على  $\left] 0, \sqrt[n-1]{\frac{1}{3n}} \right[$ .

(b) ضع جدول تغيرات  $f_n$  واستنتج إشارتها .

(2) بين أن المعادلة  $f_n(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $u_n$  في المجال  $[0, +\infty[$ .

(3) أحسب  $f_n(1)$  واستنتج أن  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 0 < u_n < 1$

(4) (a) بين أن :  $(\forall x \in ]0, 1[) : f_{n+1}(x) < f_n(x)$

(b) استنتج أن المتتالية  $(u_n)$  تزايدية .

(c) بين أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة .

(5) نضع  $\lim u_n = l$  .

(a) بين  $0 \leq l \leq 1$  .

(b) بين :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_n \leq l$  .

(c) بين أن  $l = 1$

### تمرين 24

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\left[ 0, \frac{\pi}{2} \right]$  بمل يلي :  $f(x) = x + \cos(x)$

(1) أدرس تغيرات الدالة  $f$  واستنتج أن  $f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) \subset \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \quad (2) \text{ نعتبر المتتالية } (u_n) \text{ المعرفة بما يلي :}$$

$$(a) \text{ بين أن : } (\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq u_n \leq \frac{\pi}{2}$$

(b) بين أن المتتالية  $(u_n)$  تزايدية .

(c) استنتج أن  $(u_n)$  متقاربة وأحسب نهايتها .

$$(3) \text{ نعتبر المتتالية } (v_n) \text{ المعرفة بما يلي : } v_n = \frac{\pi}{2} - u_n$$

$$(a) \text{ بين أن : } (\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq v_n \leq \frac{\pi}{2}$$

$$(b) \text{ بين أن : } (\forall n \in \mathbb{N}) : v_{n+1} = v_n - \sin(v_n)$$

$$(4) \text{ نقبل أن : } (\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]) : 0 \leq x - \sin(x) \leq \frac{x^3}{6}$$

$$(a) \text{ بين } (\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq v_{n+1} \leq \frac{1}{6} v_n^3$$

$$(b) \text{ استنتج أن : } (\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq v_n \leq \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{3^n-1}{2}} v_0^{(3^n)}$$

(c) نفترض أن  $\alpha = 1,57$

إذا علمنا أن 3,14 قيمة مقربة بتفريط للعدد  $\pi$  بالدقة  $2 \cdot 10^{-3}$  ، بين أن قيمة مقربة بتفريط

للعدد  $\frac{\pi}{2}$  بالدقة  $10^{-30}$  .