

المتتاليات العددية

لنكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على \mathbb{R}^+ بما

التمرين 02

$$f(x) = \left(\frac{1 + \sqrt[3]{x}}{2} \right)^3 \text{ يلي:}$$

1 - أدرس رتبة f على \mathbb{R}^+ و تحقق أن $f([0,1[) \subset [0,1[$

2 - بين أن لكل x من \mathbb{R}^+ :

$$f(x) - x = \frac{1}{2}(1 - \sqrt[3]{x}) \left(\frac{1}{4}(1 + \sqrt[3]{x})^2 + \frac{1}{2}\sqrt[3]{x}(1 + \sqrt[3]{x}) + \sqrt[3]{x^2} \right)$$

3- لتكن (U_n) المتتالية العددية المعرفة بالصيغة الترجعية التالية

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \left(\frac{1 + \sqrt[3]{U_n}}{2} \right)^3; \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

a - بين أن: $0 \leq U_n < 1$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

b - حدد رتبة المتتالية (U_n) واستنتج أنها متقاربة محددًا نهايتها

4 - لكل n من \mathbb{N} نضع: $V_n = -1 + \sqrt[3]{U_n}$

a - بين أن المتتالية (V_n) هندسية محددًا أساسها وحدها الأول

b - استنتج أن: $U_n = \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right)^3$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

c - أحسب بدلالة n : $W_n = \sum_{k=0}^n (k + V_k)$ ثم استنتج

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n$$

d - لكل n من \mathbb{N}^* نضع:

$$S_n = (U_1)^{\frac{1}{3}} + (U_2)^{\frac{1}{3}} + \dots + (U_n)^{\frac{1}{3}}$$

بين: $S_n = n - 1 + \left(\frac{1}{2} \right)^n$ ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

لنكن f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R}^+ بما يلي:

التمرين 01

$$f(x) = \frac{x \operatorname{Arctan} x}{\pi}$$

و (U_n) المتتالية العددية المعرفة بالصيغة الترجعية التالية:

$$\begin{cases} U_0 \in]0,1[\\ U_{n+1} = \frac{U_n \operatorname{Arctan} U_n}{\pi} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1 - a - بين أن f تزايدية قطعًا على \mathbb{R}^+

b - تحقق أن لكل x من \mathbb{R}^+ : $f(x) \leq \frac{1}{2}x$

2 - a - بين أن: $0 < U_{n+1} \leq \frac{1}{2}U_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

b - بين أن: $0 < U_n \leq 1$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

c - استنتج أن (U_n) متقاربة

3 - استنتج أن: $0 < U_n \leq \left(\frac{1}{2} \right)^n U_0$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

و حدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

4 - نعتبر المتتالية العددية (S_n) المعرفة كمايلي:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$$

a - تحقق أن (S_n) تزايدية قطعًا

b - بين أن:

$$(n \in \mathbb{N}) \quad U_0 \leq S_n \leq 2U_0 \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right)$$

c - استنتج أن (S_n) متقاربة

التمرين : 03

لتكن (U_n) المتتالية العددية المعرفة بالصيغة الترجيعية التالية:

$$\begin{cases} U_0 = \alpha \in]1, +\infty[\\ U_{n+1} = \frac{\alpha U_n + 1}{U_n} \quad ; \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

نعتبر المتتاليتين العدديتين (V_n) و (W_n) المعرفتين بما يلي:

$$\begin{aligned} & V_n = U_{2n} \quad \text{و} \\ & (\forall n \in \mathbb{N}) \quad W_n = U_{2n+1} \end{aligned}$$

1- بين أن: $\alpha \leq U_n < \alpha + 1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

2- بين أن:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad V_{n+1} = \alpha + \frac{V_n}{\alpha V_n + 1}$$

b - بين أن:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad W_{n+1} = \alpha + \frac{W_n}{\alpha W_n + 1}$$

c - استنتج أن: $V_n < W_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

3- a - بين أن المتتالية (V_n) تزايدية قطعا

b - استنتج أن المتتالية (W_n) تناقصية قطعا

4- a - بين أن:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad W_{n+1} - V_{n+1} \leq \frac{1}{(\alpha^2 + 1)^2} (W_n - V_n)$$

b - استنتج أن:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 < W_n - V_n < \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{(\alpha^2 + 1)^2} \right)^n$$

c - استنتج أن المتتاليتين (V_n) و (W_n) متحاديتين

5- a - بين أن (V_n) متقاربة و أن

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4}}{2}$$

b - نضع $\beta = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4}}{2}$ بين أن:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |U_n - \beta| \leq \left(\frac{1}{\alpha\beta} \right)^n |\beta - \alpha|$$

c - استنتج: $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

التمرين : 04

f دالة عددية معرفة على \mathbb{R} بما يلي:

$$f(x) = 2 \left(\frac{\pi}{2} - \text{Arc tan } |x| \right)$$

1- لتكن $(U_n)_{n \geq 1}$ المتتالية العددية المعرف بما يلي:

$$U_n = 2 \left(\text{Arc tan } 1 + 2 \text{Arc tan } \frac{1}{2} + \dots + n \text{Arc tan } \frac{1}{n} \right)$$

$$a - \text{تحقق أن: } U_n = \sum_{k=1}^n k f(k) \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

b - بين أن:

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad n(n+1) \text{Arc tan } \frac{1}{n} \leq U_n \leq \frac{\pi n(n+1)}{4}$$

c - استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

2- بين أنه: $f(\alpha) = \alpha$ $(\exists! \alpha \in]1, 2[)$

3- نعتبر المتتالية العددية (V_n) المعرفة بالصيغة الترجيعية التالية

$$\begin{cases} V_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ V_{n+1} = \pi - 2 \text{Arc tan}(V_n) \quad , \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

ولتكن (W_n) و (S_n) المتتاليتين العدديتين المعرفتين بما يلي:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad S_n = V_{2n+1} \quad \text{و} \quad W_n = V_{2n}$$

a - بين أن: $0 < V_n < \pi$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

b - بين أن: $W_{n+1} = (f \circ f)(W_n)$ و

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad S_{n+1} = (f \circ f)(S_n)$$

c - بين أن: $W_n < \alpha < S_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

التمرين 05:

نضع : $\omega = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ و لتكن (U_n) المتتالية العددية المعرفة بالصيغة الترجعية التالية

$$\begin{cases} U_0 = U_1 = 1 \\ U_{n+2} = U_{n+1} + U_n \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

1 - تحقق أن : $\omega^2 = \omega + 1$ و أن $\omega - 1 = \frac{1}{\omega}$

2 - بين أن : $U_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\omega^{n+1} - (1-\omega)^{n+1})$ و استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

3 - نعتبر المتتالية العددية (V_n) المعرفة بما يلي: $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad V_n = \frac{U_{n+1}}{U_n}$

a - بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \omega^{n+1} (V_n - \omega) U_n = (-1)^{n+1}$

b - بين أن (V_n) متقاربة وحدد نهايتها

ليكن α عددا حقيقيا من المجال $]1, +\infty[$ و N عددا صحيحا طبيعيا بحيث : $N - 1 \leq \sqrt{\alpha} \leq N$

و لتكن (U_n) و (V_n) المتتاليتين العدديتين المعرفتين كما يلي:

$$\begin{cases} V_0 = 1 \\ V_{n+1} = \frac{V_n + \sqrt{\alpha}}{2} \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad \text{و} \quad \begin{cases} U_0 = N \\ U_{n+1} = \frac{U_n^2 + \alpha}{2U_n} \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

1 - a - بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_{n+1} - \sqrt{\alpha} = \frac{1}{2U_n} (U_n - \sqrt{\alpha})^2$

b - بين أن (U_n) تناقصية

c - استنتج أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \sqrt{\alpha} \leq U_n \leq N$

2 - a - بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 0 \leq U_n - \sqrt{\alpha} \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\right)^{\sum_{k=0}^{n-1} 2^k}$

b - استنتج أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 0 \leq U_n - \sqrt{\alpha} \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\right)^{2^n - 1}$ ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

3 - نعتبر المتتالية العددية (W_n) المعرفة بما يلي: $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad W_n = V_n - \sqrt{\alpha}$

a - بين أن (W_n) متتالية هندسية

b - استنتج $\lim V_n$

التمرين 06: