

التسعين : 1

1. باستعمال خوارزمية أفليدس، حدد القاسم المشترك الأكبر للعديدين 69 و 39 .

2. استنتج زوجا (u, v) من \mathbb{Z}^2 بحيث : $69u + 39v = d$

حيث d هو القاسم المشترك الأكبر للعديدين 69 و 39 .

3. هل يمكن إيجاد عددين نسبيين x و y بحيث : $69x + 39y = 4$ ؟

4. حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة $69x + 39y = 3$.

التسعين : 2

نضع : $d = a \wedge b$ و $a = da'$ و $b = db'$.
1. بين أن : $a' \wedge b' = 1$.

2. حدد جميع الأزواج (a, b) من \mathbb{N}^{*2} التي تحقق ما يلي :

$$\begin{cases} a \wedge b = 9 \\ a + b = 81 \end{cases}$$

التسعين : 3

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$

1. بين أن $2n^2 + 1$ و n أوليان فيما بينهما.

2. بين أن $2n^2 + 1$ و $n^2 + 1$ أوليان فيما بينهما.

3. بين أن الكسر $\frac{n^3 + n}{2n^2 + 1}$ غير قابل للاختزال.

التسعين : 4

1. نعتبر في \mathbb{Z}^2 المعادلة : $(E_1) : 6x - 5y = 7$.

أ- ليكن (x, y) حلا للمعادلة (E_1) . بين أن : $[5] \equiv 2 \cdot x$.

ب- استنتج في \mathbb{Z}^2 ، مجموعة حلول المعادلة (E_1) .

تطبيق :

في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد منظم (O, \vec{i}, \vec{j}) ،

نعتبر المستقيم (Δ) ذو المعادلة $6x - 5y = 7$. حدد عدد

النقط من المستقيم (Δ) ، ذات الإحداثيات الصحيحة الطبيعية ،

والتي أفاصلها أصغر من أو يساوي 500 .

3. نعتبر في \mathbb{Z}^2 المعادلة : $(E_2) : 6x^2 - 5y^2 = 7$.

أ- ليكن (x, y) حلا للمعادلة (E_1) . بين أن : $[5] \equiv 2 \cdot x^2$.

ب- بين أن لكل x من \mathbb{Z} ، لدينا :

$$[5] \equiv 0 \quad [5] \equiv 1 \quad [5] \equiv 4 \quad [5] \equiv 2 \quad [5] \equiv 3$$

ج- حدد مجموعة حلول المعادلة (E_2) .

التسعين : 5

نذكر أن لكل $k \in \mathbb{N}^*$ ولكل $x \in \mathbb{R}$ ، لدينا :

$$(x-1)(1+x+\dots+x^{k-1}) = x^k - 1$$

ليكن a عددا صحيحا طبيعيا أكبر من أو يساوي 2 ، وليكن m و n عددين صحيحين طبيعيين غير منعدمين . نضع :

$$\Delta = p \operatorname{gcd}(a^m - 1, a^n - 1) \quad \text{و} \quad d = p \operatorname{gcd}(m, n)$$

1. ليكن p قاسما موجبا للعدد n . بين أن $a^p - 1$ يقسم $a^n - 1$.

2. استنتج أن $a^d - 1$ يقسم Δ .

3. باستعمال مبرهنة *Bezout* ، بين أنه يوجد زوج (u, v) من

$$\mathbb{N}^{*2} \quad \text{بحيث} : \quad mu - nv = d$$

4. أ- تحقق من أن : $(a^{mu} - 1) - (a^{nv} - 1)a^d = a^d - 1$.

ب- بين أن Δ يقسم $a^d - 1$.

ج- ماذا تستنتج بالنسبة ل Δ ؟

$$5. \quad \text{حدد} \quad (3^{1905} - 1) \wedge (3^{2005} - 1)$$

التسعين : 6

1. ليكن $n \in \mathbb{N}$. نفترض أن n عدد فردي غير أولي .

نضع : $N = a^2 - b^2$ ، حيث $(a, b) \in \mathbb{N}^2$.

1. بين أن a و b مختلفي الزوجية .

2. بين أن N يكتب على شكل جداء عددين طبيعيين p و q .

3. ما هي زوجية العددين p و q ؟

11. نفترض أن 250507 عدد غير أولي . نعتبر في \mathbb{N}^2 المعادلة :

$$(E) : a^2 - 250507 = b^2$$

1. ليكن X عددا صحيحا طبيعيا .

أ- أنشئ جدولا تحدد فيه بواقي القسمة الأقليدية للعدد X على 9 وبواقي

القسمة الأقليدية للعدد X^2 على 9 .

ب- علما أن $a^2 - 250507 = b^2$ ، حدد بواقي القسمة الأقليدية للعدد

$a^2 - 250507$ على 9 ، ثم استنتج بواقي القسمة الأقليدية للعدد

a^2 على 9 .

ج- بين أن : $[9] \equiv 1 \quad [9] \equiv 8 \quad [9] \equiv 4$.

2. أ- بين أنه إذا كان (a, b) حلا للمعادلة (E) ، فإن : $a \geq 501$.

ب- بين أن الأزواج $(501, b)$ ليست حلا للمعادلة (E) .

3. نفترض أن (a, b) حل للمعادلة (E) .

أ- بين أن : $[9] \equiv 503 \quad [9] \equiv 505 \quad [9] \equiv 1$.

ب- حدد أصغر عدد صحيح طبيعي k بحيث يكون الزوج

$(b, 505 + 9k)$ حلا للمعادلة (E) . حدد هذا الزوج.

1. استنتج كتابة للعدد 250507 على شكل جداء عاملين.
2. هل هذين العاملين أوليين فيما بينهما؟
3. هل هذه الكتابة وحيدة؟

التسعين : 7

مبرهنة فيرما : ليكن p عددا صحيحا طبيعيا أوليا، وليكن $a \in \mathbb{N}$

حيث $a \wedge p = 1$. لدينا : $[p] \equiv 1 \pmod{p}$.

1. ليكن p عددا صحيحا طبيعيا أوليا وفرديا.

أ- بين أن : $[p] \equiv 1 \pmod{2^k} / \exists k \in \mathbb{N}$.

ب- ليكن k عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم بحيث :

$[p] \equiv 1 \pmod{2^k}$ ، وليكن n عددا صحيحا طبيعيا.

بين أنه إذا كان k يقسم n ، فإن : $[p] \equiv 1 \pmod{2^n}$.

ج- ليكن b أصغر عدد صحيح طبيعي غير منعدم بحيث :

$[p] \equiv 1 \pmod{2^b}$. باستعمال القسمة الأقليدية للعدد n على b ،

بين أنه إذا كان $[p] \equiv 1 \pmod{2^n}$ ، فإن b يقسم n .

2. ليكن q صحيحا طبيعيا أوليا وفرديا، وليكن $A = 2^q - 1$.

ليكن p قاسما أوليا للعدد A .

أ- تحقق من أن : $[p] \equiv 1 \pmod{2^q}$.

ب- بين أن p فردي.

ج- ليكن b أصغر عدد صحيح طبيعي غير منعدم بحيث :

$[p] \equiv 1 \pmod{2^b}$. باستعمال a ، بين أن b يقسم q . استنتج أن

$$b = q$$

د- بين أن q يقسم $p - 1$ ، ثم أن $[q] \equiv 1 \pmod{p}$.

3. ليكن $A_1 = 2^{17} - 1$. نعطي لائحة الأعداد الأولية الأصغر من

أو يساوي 400 والتي تكتب على شكل $34m + 1$ حيث

$m \in \mathbb{N}^*$ كما يلي : 103 ; 137 ; 239 ; 307 .

بين أن A_1 عدد أولي.

التسعين : 8

نعتبر النظمة : $(S) : x \in \mathbb{Z} , \begin{cases} x \equiv 5 \pmod{7} \\ x \equiv 1 \pmod{4} \end{cases}$

1. حل المعادلة : $(E) : (u, v) \in \mathbb{Z}^2 , 7u + 4v = 1$

2. ليكن (u_0, v_0) حلا للمعادلة (E) و $x_0 = 7u_0 + 4v_0$

بين أن العدد x_0 حل للنظمة (S) من أجل كل حل (u_0, v_0)

للمعادلة (E) .

3. حل النظمة :

$$x \in \mathbb{Z} : \begin{cases} x \equiv x_0 \pmod{7} \\ x \equiv x_0 \pmod{4} \end{cases}$$

4. استنتج حلول النظمة (S) .

التسعين : 9

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا.

1. بين أن $n^2 + 5n + 4$ و $n^2 + 3n + 2$ يقبلان القسمة على $n + 1$.

2. حدد قيم n التي من أجلها يقبل العدد $3n^2 + 15n + 19$ القسمة على $n + 1$.

3. استنتج أنه مهما يكن n من \mathbb{N} فإن $3n^2 + 15n + 19$ لا يقبل القسمة على $n^2 + 3n + 2$.

التسعين : 10 : نعتبر في \mathbb{N}^{*2} المعادلة :

$$(E) : x^2(x^2 + 7) = y(2x + y)$$

ليكن (x, y) عنصرا من \mathbb{N}^{*2} وليكن $d = x \wedge y$.
نضع : $x = da$ و $y = db$.

1. نفترض أن (x, y) حل للمعادلة (E) .

أ- تحقق أن : $a^2(d^2a^2 + 7) = b(2a + b)$.

ب- استنتج أنه يوجد عدد صحيح طبيعي k بحيث :

$$2a + b = ka^2 \text{ و } d^2a^2 + 7 = kb$$

ج- بين أن : $a = 1$.

د- استنتج أن : $(b + 1)^2 = d^2 + 8$.

2. حل في \mathbb{N}^{*2} المعادلة (E) .

التسعين : 11 : ليكن n عددا صحيحا طبيعيا .

1. أ- بين أن : $[8] \equiv 1 \pmod{n^2} \Rightarrow n$ فردي.

ب- بين أن : $[8] \equiv 0 \pmod{n^2}$ أو $[8] \equiv 4 \pmod{n^2} \Rightarrow n$ زوجي.

2. لتكن a و b و c أعداد صحيحة طبيعية فردية .

أ- بين أن : $a^2 + b^2 + c^2$ ليس مربعا كاملا (أي ليس مربعا لعدد صحيح) .

ب- بين أن : $[8] \equiv 6 \pmod{2(ab + bc + ca)}$. لاحظ أن :

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

ج- استنتج أن $2(ab + bc + ca)$ ليس مربعا كاملا .

د- بين أن $ab + bc + ca$ ليس مربعا كاملا .

التسعين : 12 : نعتبر ثلاثة أعداد صحيحة طبيعية a و b و c

بحيث كتابتها في نظمة العد ذات الأساس x هي : $a = \overline{13054}^{(x)}$

و $b = \overline{114}^{(x)}$ و $c = \overline{111}^{(x)}$. نفترض أن : $a = bc$.

1. حدد x ، وكتابة كل من a و b و c في نظمة العد العشري .

2. أحسب $b \wedge c$.