السنة 2 بكالوريا علوم رياضية	الأعداد العقدية- الحساب التكاملي حلول مقترحة	

فرض تجريبي مساهمة من أحد أصدقاء موقع رياضيات النجاح - مدة الانجاز ساعتان

تمرين 1 :

1

$$I(x)=\int_0^x e^t\cos(2t)\,dt=\int_0^x\left(e^t\right)'\cos(2t)\,dt=\left[e^t\cos(2t)\right]_0^x-\int_0^x e^t\left(\cos(2t)\right)'\,dt$$

$$=\left[e^t\cos(2t)\right]_0^x+2\int_0^x e^t\sin(2t)\,dt=\left[e^t\cos(2t)\right]_0^x+2\int_0^x\left(e^t\right)'\sin(2t)\,dt$$

$$=\left[e^t\cos(2t)\right]_0^x+2\left(\left[e^t\sin(2t)\right]_0^x-\int_0^x e^t\left(\sin(2t)\right)'\,dt\right)$$

$$I(x)=\left[e^t\cos(2t)+2e^t\sin(2t)\right]_0^x-2\left(2\int_0^x e^t\cos(2x)\,dt\right)=\left[e^t\left(\cos(2t)+2\sin(2t)\right)\right]_0^x-4\,I(x)$$

$$I(x)=\int_0^x e^t\cos(2t)\,dt=\int_0^x\left(e^t\right)'\cos(2t)\,dt=\left[e^t\cos(2t)\right]_0^x-\int_0^x e^t\left(\cos(2t)\right)'\,dt$$

$$=\left[e^t\cos(2t)\right]_0^x+2\int_0^x e^t\sin(2t)\,dt=\left[e^t\cos(2t)\right]_0^x+2\int_0^x\left(e^t\right)'\sin(2t)\,dt$$

بالتالي :

$$=\left[e^t\cos(2t)\right]_0^x+2\left(\left[e^t\sin(2t)\right]_0^x-\int_0^x e^t\left(\sin(2t)\right)'\,dt\right)$$

$$I(x)=\frac{1}{5}\left[e^t\left(\cos(2t)+2\sin(2t)\right)\right]_0^x=\frac{\left(\cos(2x)+2\sin(2x)\right)e^x-1}{5}$$

2

على المجال $[0;\circledR]$ الدالة $g:x\to e^x\cos(2x)$ قابلة للاشتقاق على IR

و لدينا : $\forall x\in IR\ g'(x)=e^x\left(\cos(2x)-2\sin(2x)\right)$ ، ولكون الدالة g' متصلة على $[0;\circledR]$ فهي محدودة

عليه، بالتالي :

$$v_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{k\circledR}{n}}\cos\left(\frac{2k\circledR}{n}\right)=\frac{1}{\circledR}\,\frac{\circledR}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{k\circledR}{n}}\cos\left(\frac{2k\circledR}{n}\right)=\frac{1}{\circledR}\,\frac{\circledR-0}{n}\sum_{k=1}^{n}g\left(0+k\frac{\circledR-0}{n}\right)$$

$$v_n=\frac{1}{\circledR}\int_0^{\circledR}g(t)dt=\frac{I(\circledR)}{\circledR}=\frac{e^{\circledR}-1}{5\circledR}$$

تمرين 2 :

$$(E):\ z^2+2\left(1-\boldsymbol{i}\sqrt{3}\right)z-4\left(1+\boldsymbol{i}\sqrt{3}\right)=0$$

الجزء الأول

1

لدينا :

$$\Delta=4\left(1-\boldsymbol{i}\sqrt{3}\right)^2+16\left(1+\boldsymbol{i}\sqrt{3}\right)=4\left(1-2\boldsymbol{i}\sqrt{3}-3+4+4\boldsymbol{i}\sqrt{3}\right)=4\left(2+2\boldsymbol{i}\sqrt{3}\right)=16\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}\right)=16\,e^{\frac{\circledR}{3}\boldsymbol{i}}$$

2

أحد الجذرين المربعين لـ Δ هو : $¢=4\,e^{\frac{\circledR}{6}\boldsymbol{i}}=4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\boldsymbol{i}\right)$

منه :

$$z_1=\frac{-2\left(1-\boldsymbol{i}\sqrt{3}\right)+4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\boldsymbol{i}\right)}{2}=-1+\boldsymbol{i}\sqrt{3}+\sqrt{3}+\boldsymbol{i}=\sqrt{3}-1+\left(\sqrt{3}+1\right)\boldsymbol{i}$$

و :

$$z_2=\frac{-2\left(1-\boldsymbol{i}\sqrt{3}\right)-4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\boldsymbol{i}\right)}{2}=-1+\boldsymbol{i}\sqrt{3}-\sqrt{3}-\boldsymbol{i}=-\sqrt{3}-1+\left(\sqrt{3}-1\right)\boldsymbol{i}$$

3

لدينا :

$$z_1^2=\left(\sqrt{3}-1+\left(\sqrt{3}+1\right)\boldsymbol{i}\right)^2=\left(\sqrt{3}-1\right)^2+2\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)\boldsymbol{i}-\left(\sqrt{3}+1\right)^2$$

$$z_1^2=4-2\sqrt{3}+4\boldsymbol{i}-\left(4+2\sqrt{3}\right)=-4\sqrt{3}+4\boldsymbol{i}=4\left(-\sqrt{3}+\boldsymbol{i}\right)$$

و:

$$\boldsymbol{i}\,z_1=\boldsymbol{i}\left(\sqrt{3}-1+\left(\sqrt{3}+1\right)\boldsymbol{i}\right)=\boldsymbol{i}\left(\sqrt{3}-1\right)-\left(\sqrt{3}+1\right)=z_2$$

4

$$z_1^2=4\left(-\sqrt{3}+\boldsymbol{i}\right)=8\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\boldsymbol{i}\right)=\left[8,\frac{5\circledR}{6}\right]$$

5 بما أن : $z_1^2=\left[8,\frac{5\pi}{6}\right]$ فإن : $z_1=\left[\sqrt{8},\frac{5\pi}{12}\right]$ أو $z_1=\left[\sqrt{8},\frac{5\pi}{12}+\pi\right]$

أي : $z_1=\left[2\sqrt{2},\frac{5\pi}{12}\right]$ أو $z_1=\left[2\sqrt{2},\frac{17\pi}{12}\right]$

ولكن وبما أن $\mathrm{Re}(z_1)>0$ و $\mathrm{Re}\left(\left[2\sqrt{2},\frac{17\pi}{12}\right]\right)=2\sqrt{2}\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right)<0$ فإن : $z_1=\left[2\sqrt{2},\frac{5\pi}{12}\right]$

منه : $z_2=\boldsymbol{i}\,z_1=\left[1,\frac{\pi}{2}\right]\left[2\sqrt{2},\frac{5\pi}{12}\right]=\left[1\times2\sqrt{2},\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{2}\right]=\left[2\sqrt{2},\frac{11\pi}{12}\right]$

الجزء الثاني

$A(z_1)$ و $B(z_2)$ ، R الدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$ ، $M'(z')$ صورة $M(z)$ بالدوران R

1 الكتابة العقدية للدوران R هي $z'=\boldsymbol{i}\,z$

بما أن : $z_2=\boldsymbol{i}\,z_1$ فإن : $B=R(A)$

2 أ) لدينا لكل $z\neq z_2$ و $z\neq z_1$: $z'=\boldsymbol{i}\,z$ و $z_2=\boldsymbol{i}\,z_1$ منه : $\frac{z'-z_2}{z-z_2}=\frac{\boldsymbol{i}\,z-\boldsymbol{i}\,z_1}{z-z_2}=\boldsymbol{i}\,\frac{z-z_1}{z-z_2}$

منه : $\arg\left(\frac{z'-z_2}{z-z_2}\right)\equiv\arg(\boldsymbol{i})+\arg\left(\frac{z-z_1}{z-z_2}\right)[2\pi]$ أي : $\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BM'}\right)\equiv\frac{\pi}{2}+\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM}\right)[2\pi]$

ب) إذا كانت $M=B$ أو $M=A$ فالنقط M و B و M' مستقيمية.

إذا كانت $M\neq B$ أو $M\neq A$ فإن :

$M\in(T)\ \Leftrightarrow\ \left(\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BM'}\right)\equiv0[2\pi]\ ou\ \left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BM'}\right)\equiv\pi\,[2\pi]\right)$

$M\in(T)\ \Leftrightarrow\ \left(\frac{\pi}{2}+\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM}\right)\equiv0[2\pi]\ ou\ \frac{\pi}{2}+\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM}\right)\equiv\pi\,[2\pi]\right)$

$M\in(T)\ \Leftrightarrow\ \left(\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM}\right)\equiv\frac{-\pi}{2}[2\pi]\ ou\ \left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\right)$

$M\in(T)\ \Leftrightarrow\ (BM)\perp(AM)$

خلاصة : (T) هي الدائرة ذات القطر $[AB]$

تمرين 3 :

الجزء الأول

$\forall x\in IR^*\qquad g(x)=1+\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}$

1 الدالة g متصلة و قابلة للاشتقاق على IR^* ، ولدينا :

$$\forall x\in IR^*\ \ g'(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)\times\frac{-1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}+\left(\frac{-1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}=\left(\frac{-1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}\left(1+\frac{1}{x}+1\right)=\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\left(\frac{2x+1}{-x}\right)$$

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		0		$+\infty$
$2x+1$		-	0	+	‖	+	
$-x$		+		+	0	-	
$g'(x)$		-	0	+	‖	-	
$g(x)$		↘	$\frac{e^2-1}{e^2}$	↗	‖	↘	

ليس مطلوبا إدراج النهايات في المحدات في جدول التغيرات ما دام لم يرد حسابها في أي سؤال سابق.

2 لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=1+1=2$ بما أن الدالة g تناقصية قطعا على $]0;+\infty[$ فإن : $\forall x\in\,]0;+\infty[\ \ g(x)>2$

ولدينا : $g(x)>\frac{e^2-1}{e^2}$ $\forall x\in]-\infty;0[$ ، بالتالي: $g(x)>0$ $\forall x\in IR^*$

الجزء الثاني

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} \; ; x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1 لدينا : $\left(\frac{0+}{+\infty}\right)$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0$ و $\left(\frac{0+}{1+0}\right)$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0$

بالتالي : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$ ، ما يعني أن f متصلة في الصفر

2 بما أن الدوال : $x\mapsto x$ و $x\mapsto 1+e^{\frac{1}{x}}$ قابلة للاشتقاق على IR^* وحيث أن : $1+e^{\frac{1}{x}}\neq 0$ $\forall x\in IR^*$

فإن f قابلة للاشتقاق على IR^* و لدينا :

$$\forall x\in IR^* \quad f'(x)=\left(\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}\right)'=\frac{1+e^{\frac{1}{x}}-x\left(\frac{-1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}=\frac{1+e^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}=\frac{g(x)}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}$$

3 سبق و برهنا أن $g(x)>0$ $\forall x\in IR^*$ منه : $f'(x)>0$ $\forall x\in IR^*$ ولكون : $f'(0)=0$

فإن : $f'(x)\geq 0$ $\forall x\in IR$ و $x=0 \Leftrightarrow f'(x)=0$ (أي أن المشتقة تنعدم في عدد معدود من الحلول)

بالتالي f تزايدية قطعا على IR

الجزء الثالث

$$\forall x\in[1;+\infty[\quad F(x)=\int_1^{x^2} f(t)dt$$

1 ليكن $x\in]1;+\infty[$ ، بما أن الدالة $t\mapsto f(t)$ متصلة على $[1;x^2]$

فإن : $(\exists c_x\in]1;x^2[)\ f(c_x)=\frac{1}{x^2-1}\int_1^{x^2} f(t)dt$ أي : $(\exists c_x\in]1;x^2[)\ f(c_x)=\frac{1}{x^2-1}F(x)$

بالتالي : $(\forall x>1)\ (\exists c_x\in]1;x^2[)\ f(c_x)=\frac{1}{x^2-1}F(x)$

2 ليكن $x\in]1;+\infty[$ إذن : $(\exists c_x\in]1;x^2[)\ f(c_x)=\frac{1}{x^2-1}F(x)$

بما أن f تزايدية قطعا على IR فإن :

$$1<c_x<x^2 \Rightarrow f(1)<f(c_x)<f(x^2) \Rightarrow f(1)<\frac{1}{x^2-1}F(x)<f(x^2) \Rightarrow (x^2-1)f(1)\leq F(x)\leq (x^2-1)f(x^2)$$

بالنسبة لـ $x=1$ المتفاوتة صحيحة

بالتالي: لكل x من $[1;+\infty[$: $(x^2-1)f(1)\leq F(x)\leq (x^2-1)f(x^2)$

3 لدينا : $(x+1)f(1)\leq \frac{F(x)-F(1)}{x-1}\leq (x+1)f(x^2)$ $\forall x>1$ ($F(1)=0$)

وبما أن : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(x+1)f(1)=2f(1)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(x+1)f(x^2)=2f(1)$ فإن : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}=2f(1)$

بالتالي F قابلة للاشتقاق يمين 1 ولدينا : $F'_d(1)=2f(1)=\frac{2}{1+e}$

4 بما أن $t\mapsto f(t)$ متصلة على $[1;x^2]$ فإن $F(x)$ معرفة لكل $x\geq 1$ و قابلة للاشتقاق على $]1;+\infty[$

وبوضع : $U(x)=\int_1^x f(t)dt$ $\forall x\in[1;+\infty[$ فإن : $F(x)=U(x^2)$ $\forall x\in[1;+\infty[$

	منه : $\forall x \in]1;+\infty[\quad F'(x)=2xU'(x^2)=2x\,f(x^2)=\dfrac{2x^3}{1+e^{\frac{1}{x^2}}}$	
	الجزء الرابع $\forall n \in IN^* \quad u_n=\int_{\frac{1}{n}}^{1}\dfrac{f(t)}{t^3}dt$	
1	لدينا : $\forall n \in IN^*\ u_{n+1}-u_n=\int_{\frac{1}{n+1}}^{1}\dfrac{f(t)}{t^3}dt-\int_{\frac{1}{n}}^{1}\dfrac{f(t)}{t^3}dt=\int_{\frac{1}{n+1}}^{1}\dfrac{f(t)}{t^3}dt+\int_{1}^{\frac{1}{n}}\dfrac{f(t)}{t^3}dt=\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}}\dfrac{f(t)}{t^3}dt$ وبما أن الدالة $t\mapsto\dfrac{f(t)}{t^3}$ موجبة قطعا على $\left[\dfrac{1}{n+1};\dfrac{1}{n}\right]$ فإن : $\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}}\dfrac{f(t)}{t^3}dt>0$ بالتالي $(u_n)_{n\geq 1}$ تزايدية قطعا	
2	نضع : $u=\dfrac{1}{t}$ منه : $t=\dfrac{1}{u}$ منه : $dt=\dfrac{-1}{u^2}du$ و $\begin{cases} t=\dfrac{1}{n} \Rightarrow u=n \\ t=1 \Rightarrow u=1 \end{cases}$ منه : $u_n=\int_{n}^{1}\dfrac{f\left(\frac{1}{u}\right)}{\frac{1}{u^3}}\left(\dfrac{-1}{u^2}\right)du=-\int_{n}^{1}u\,f\left(\dfrac{1}{u}\right)du=-\int_{n}^{1}u\dfrac{\frac{1}{u}}{1+e^u}\,du=\int_{n}^{1}\dfrac{-1}{1+e^u}\,du=\int_{n}^{1}\dfrac{-1-e^u+e^u}{1+e^u}\,du$ $u_n=\int_{n}^{1}\left(-1+\dfrac{e^u}{1+e^u}\right)du=\int_{1}^{n}\left(1-\dfrac{e^u}{1+e^u}\right)du$	
3	$u_n=\int_{1}^{n}\left(1-\dfrac{e^u}{1+e^u}\right)du=\left[u-\ln(1+e^u)\right]_1^n=n-\ln(1+e^n)-1+\ln(2)=\ln(2)-1-\ln\left(\dfrac{1+e^n}{e^n}\right)$ بالتالي : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ln(2)-1-\ln(1)=\ln(2)-1$	