التمرين الأول

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة $(E)\quad \frac{1}{2}Z^3-(1+i)Z^2+2(1+i)Z-4i=0$

1) أ- تحقق أن العدد $Z_0=2i$ حلا للمعادلة (E)

ب- حدد الأعداد β , α بحيث يكون :

$(E)\Leftrightarrow (Z-2i)\left(\frac{1}{2}Z^2+\alpha Z+\beta\right)=0$ ثم حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E)

2) في المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقط $A(1+i\sqrt{3})$ ، $B(1-i\sqrt{3})$ و $C(2i)$

أ- أحسب $\frac{z_C}{z_A}$ و استنتج طبيعة المثلث OAC محددا قياسا للزاوية $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}})$

ب- حدد d لحق النقطة D منتصف القطعة $[AC]$ و بين أن $\arg(d)\equiv\frac{5\pi}{12}\ [2\pi]$

ج- استنتج قيمة كل من $\sin\frac{5\pi}{12}$ و $\cos\frac{5\pi}{12}$

3) نعتبر الدورانين $R_1\left(A,-\frac{\pi}{2}\right)$ و $R_2\left(A,\frac{\pi}{2}\right)$ و نضع $O'=R_1(O)$ ، $B'=R_2(B)$

أ- حدد $Z_{O'}$ لحق O' و بين أن لحق النقطة B' هو $b'=1+2\sqrt{3}+i\sqrt{3}$

ب- لتكن I منتصف القطعة $[OB]$ بين أن (AI) ارتفاع للمثلث $AO'B'$

التمرين الثاني

ليكن p عددا أوليا أكبر من 3 و a عددا من $\mathbb{Z}$ بحيث $a^2+1\equiv 0\ [p]$

1) أ- بين أن $a^{p-1}\equiv 1\ [p]$

ب- استنتج أن $p\equiv 1\ [4]$

2) لتكن A مجموعة الأعداد الأولية و التي تكتب على الشكل $4k+1$.

نفترض أن A مجموعة منتهية و نضع $n=\left(2\prod_{p_k\in A}p_k\right)^2+1$

أ- بين أن العدد 3 لا يقسم العدد n (بتطبيق مبرهنة فيرما)

ب- بين أنه إذا كان p عددا أوليا يقسم العدد n فإن $p\equiv 1\ [4]$

ج- استنتج أن المجموعة A غير منتهية

التمرين الثالث

ليكن n عددا طبيعيا بحيث $n\geq 3$.

نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على المجال $]0,\infty[$ بما يلي : $f_n(x)=x-n\ln x$

1) أ- أحسب النهايات التالية $\lim_{x\to+\infty}f_n(x)$ و $\lim_{x\to 0^+}f_n(x)$

ب- أحسب المشتقة $f_n'(x)$ و وضع جدول تغيرات الدالة f_n

2) بين أن المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل حلين U_n و V_n بحيث $o<U_n<n<V_n$

3) أ- بين أن $(\forall n\geq 3)\quad 1<U_n<e$

ب- تحقق أن $f_n(U_{n+1})=\ln U_{n+1}$ و استنتج أن $(U_n)_n$ متتالية تناقصية

ج- بين أن $e^{\frac{1}{n}}<U_n<e^{\frac{3}{n}}\ (\forall n\geq 3)$ و أستنتج $\lim_{n\to+\infty}U_n$

4) أحسب $\lim_{n\to+\infty}V_n$ و بين أن $\frac{\ln V_n}{\ln n}\left(1-\frac{\ln(\ln V_n)}{\ln V_n}\right)=1$ ثم حدد $\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln V_n}{\ln n}$

5) أ- بين أن $V_n>n\ln n\quad (\forall n\geq 3)$

ب- بين أن $f_n(n^2)=nf_2(n)\ (\forall n\geq 3)$ و استنتج أن $V_n<n^2\ (\forall n\geq 3)$

(يمكن استعمال رتابة f_2 و نعطي $f_2(3)>0$)

ج- استنتج أن $V_n\leq 2n\ln n\ (\forall n\geq 3)$

د- بين أن $\lim_{n\to+\infty}\frac{V_n}{n\ln n}=1$