

**تصحیح الفرض المحروس رقم 1 الثاني**

جدول تغيرات الدالة  $f_n$

$x$	0	$+\infty$
$f_n(x)$	0	$+\infty$

$t \in [0; +\infty[$   $g(t) = e^{-t} - (1-t)$  (3)

أ- لندرس تغيرات الدالة  $g$   
 $g'(t) = 1 - e^{-t}$  لكل  $t \in [0; +\infty[$   
 $-t < 0 \Rightarrow e^{-t} < 1$   
 $\Rightarrow 1 - e^{-t} > 0$   
 $\Rightarrow g'(t) > 0$   
 ومنه:  $g$  تزايدية قطعاً على  $[0; +\infty[$

$t$	0	$+\infty$
$g(t)$	0	$+\infty$

لدينا:  $(\forall t \in [0; +\infty[) g(t) > g(0) = 0$   
 ومنه:  $e^{-t} - 1 + t > 0$   
 أي:  $1 - e^{-t} < t$   
 ولدينا:  $g'(t) > 0 \Leftrightarrow 1 - e^{-t} > 0$   
 وعليه:  $\forall t \in [0; +\infty[$   $0 < 1 - e^{-t} < t$

ب- لنبين أن:  $0 < e^{-x} - (1-x) < \frac{x^2}{2}$  ( $x > 0$ )  
 لدينا حسب السؤال السابق:

$\forall x > 0$   $0 < 1 - e^{-x} < x$   
 وعليه:  $0 < \int_0^x (1 - e^{-t}) dt < \int_0^x t dt$   
 أي:  $0 < [t + e^{-t}]_0^x < [\frac{t^2}{2}]_0^x$

ومنه:  $0 < x + e^{-x} - 1 < \frac{x^2}{2}$

إذن:  $\forall x > 0$   $0 < e^{-x} - (1-x) < \frac{x^2}{2}$

**الجزء (1)**

$(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

$f_n(0) = 0$  و  $f_n(x) = x e^{-\frac{1}{nx}}$   $x \neq 0$

1- لنبين أن  $f_n$  متصله على اليمين في  $x_0 = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{-\frac{1}{nx}}$   
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{nx} = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{nx}} = 0$   
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{-\frac{1}{nx}} = 0 = f_n(0)$

إذن  $f_n$  متصله في 0 على اليمين  
 ب- لندرس قابلية اشتقاق الدالة  $f_n$  على اليمين في 0  
 ليكن  $x$  عنصراً من المجال  $]0; +\infty[$

$\frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = e^{-\frac{1}{nx}}$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{nx} = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{nx}} = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = 0$

إذن  $f_n$  قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 و  $f_n'(0) = 0$

**2- أ**

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-\frac{1}{nx}}$

لدينا:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{nx} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{nx}} = e^0 = 1$   
 لأن  $x \rightarrow e^x$  متصله في 0

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$

ب- لنحسب المشتقة  $f_n'(x)$

لدينا: ليكن  $x \in ]0; +\infty[$   
 $f_n'(x) = e^{-\frac{1}{nx}} + x \left(\frac{1}{nx^2}\right) e^{-\frac{1}{nx}}$

$f_n'(x) = \left(1 + \frac{1}{nx}\right) e^{-\frac{1}{nx}}$

لدينا:  $(\forall x \in ]0; +\infty[) f_n'(x) > 0$

وعليه:  $f_n$  تزايدية قطعاً على  $[0; +\infty[$

⑥- لنبين أن المنحنى  $(C_2)$  هو صورة  $(C_1)$

بالتحريك  $H(0, \frac{1}{n})$ .  
 نعتبر  $M(x, y)$  نقطة من  $(C_1)$  و  $M'(x', y')$  صورتها بالتحريك  $H(0, \frac{1}{n})$   
 لنبين أن  $M'(x', y')$  تنتمي للمنحنى  $(C_2)$

$$\left( \begin{array}{l} M \text{ صورة } M' \\ \text{بالتحريك} \\ H(0, \frac{1}{n}) \end{array} \right) \Leftrightarrow \vec{OM}' = \frac{1}{n} \vec{OM}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{n} x \\ y' = \frac{1}{n} y \end{cases}$$

لدينا:  $M(x, y) \in (C_1)$  وعليه  $y = x e^{-\frac{1}{nx}}$   
 $x = n x' \Rightarrow y = n x' e^{-\frac{1}{n x'}}$

ومنه  $y' = \frac{1}{n} y \Rightarrow y' = \frac{1}{n} (n x' e^{-\frac{1}{n x'}})$

أي  $y' = x' e^{-\frac{1}{n x'}}$

وعليه  $M'(x', y') \in (C_2)$

إذن:  $(C_2)$  هو صورة  $(C_1)$  بالتحريك  $H(0, \frac{1}{n})$

الجزء (2)

$$(n \in \mathbb{N}^*) \quad I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$$

①- لنبين أن:  $\forall x \in [0, 1] \quad f_n(x) \leq x$

$$(\forall x \in [0, 1]) \quad \frac{1}{nx} \leq 0 \Rightarrow e^{-\frac{1}{nx}} \leq 1$$

$$\Rightarrow x e^{-\frac{1}{nx}} \leq x$$

وعليه:  $(\forall x \in [0, 1]) \quad f_n(x) \leq x$

②- لنستنتج أن  $I_n < \frac{1}{2}$

لدينا:  $\forall x \in [0, 1] \quad f_n(x) \leq x$

ومنه:  $\int_0^1 f_n(x) dx < \int_0^1 x dx$

أي:  $I_n < \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$

وعليه:  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad I_n < \frac{1}{2}$

③- لنبين أن:  $\frac{1}{2} - \frac{1}{n} < I_n$

لدينا (ص 4):  $(\forall x > 0) \quad f_n(x) > x - \frac{1}{n}$

ومنه:  $\int_0^1 f_n(x) dx > \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{x}{n} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$

إذن:  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad I_n > \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$

④- أ- لنبين أن:  $(\forall x > 0) \quad 0 < f_n(x) - (x - \frac{1}{n}) < \frac{1}{2n^2x}$

لدينا حسب السؤال السابق:

$$(\forall x > 0) \quad 0 < e^{-x} - (1-x) < \frac{x^2}{2} \quad (1)$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad (\forall x > 0) \quad \frac{1}{nx} \in \mathbb{R}^+$$

لنعوض ب  $\frac{1}{nx}$  في العلاقة (1):

$$0 < e^{-\frac{1}{nx}} - (1 - \frac{1}{nx}) < \frac{1}{2n^2x^2}$$

بما أن  $x > 0$  فإن:

$$0 < x e^{-\frac{1}{nx}} - (x - \frac{1}{n}) < \frac{1}{2n^2x}$$

ومنه:  $(\forall x > 0) \quad 0 < f_n(x) - (x - \frac{1}{n}) < \frac{1}{2n^2x}$

ب- لندرس الفرع اللانهائي  $(C_2)$  عند  $+\infty$   
 لدينا:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n^2x} = 0$

ومنه:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) - (x - \frac{1}{n}) = 0$

إذن المستقيم  $y = x - \frac{1}{n}$  مقارب

مائل للمنحنى  $(C_2)$  بجوار  $+\infty$

ج- لندرس الوضع النسبي لـ  $(C_2)$  والمقارب

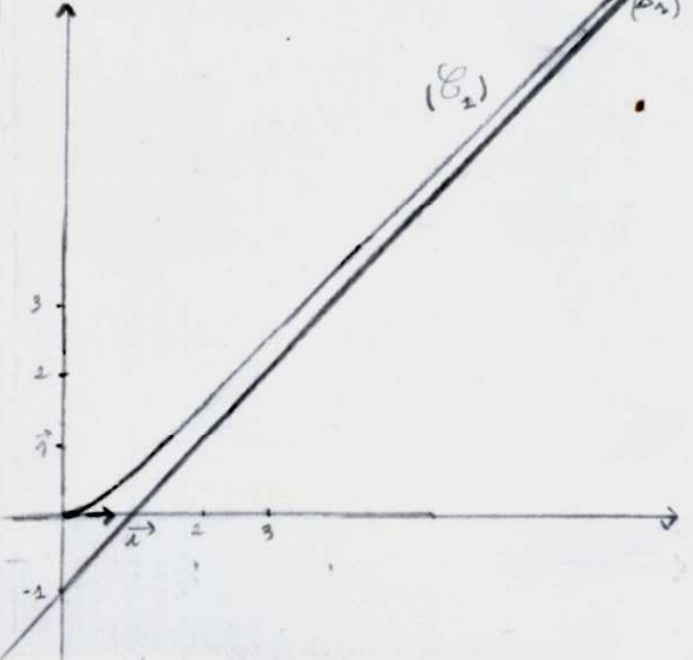
المائل  $(C_2)$ .  
 بما أن:

$$(\forall x > 0) \quad f_n(x) - (x - \frac{1}{n}) > 0$$

فإن:  $(C_2)$  يوجد فوق  $(C_1)$

⑤- لنرسم  $(C_2)$  للدالة  $f_n$

$$f_n(x) = x e^{-\frac{1}{nx}} \quad (C_2): y = x - 1$$



ب- لنبين أن المتتالية  $(\alpha_n)$  تناقصية ونستنتج أنها متقاربة.

لدينا :  $\alpha_n \ln \alpha_n = h(\alpha_n) = \frac{1}{n}$

$\alpha_{n+2} \ln \alpha_{n+2} = h(\alpha_{n+2}) = \frac{1}{n+2}$

لدينا :  $\frac{1}{n+2} < \frac{1}{n} \Leftrightarrow h(\alpha_{n+2}) < h(\alpha_n)$   
 $h$  متزايدة قطعا على  $]1; +\infty[$

$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \alpha_{n+2} < \alpha_n$  وعليه :

وبالتالي :  $(\alpha_n)$  تناقصية.

←  $(\alpha_n)$  تناقصية ومحدودة بالعدد 1 إذن  $(\alpha_n)$  متقاربة

④ - نضع :  $\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$

أ- لدينا :  $(\forall n \in \mathbb{N}) \alpha_n > 1$

وهو :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n > 1$  وعليه :

$\alpha > 1$  ← لنبين أن  $h(\alpha) = 0$

لدينا :  $\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} h(\alpha_n) = h(\alpha)$

وهو :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} h(\alpha_n) = h(\alpha)$  إذن :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n \ln \alpha_n = \alpha \ln \alpha$

بما أن :  $\alpha \ln \alpha = h(\alpha) \text{ و } \alpha_n \ln \alpha_n = \frac{1}{n}$  فإن :

$h(\alpha) = 0$

ب- لنستنتج قيمة النهاية  $\alpha$  لدينا :

$h(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha \ln \alpha = 0$

$\Leftrightarrow \ln \alpha = 0 \quad (\alpha > 1)$

$\Leftrightarrow \alpha = 1$  وعليه :

$\alpha = 1$

$x \in ]0; +\infty[$

$F(0) = 0 \text{ و } F(x) = \int_0^x f(t) dt ; x \neq 0$

① - لنبين أن :  $0 < e^{-\frac{1}{x}} < 1$  ( $\forall t > 0$ )

لدينا :  $0 < e^{-\frac{1}{x}} < 1$  ( $\forall t > 0$ )

ب- لنبين أن :  $F$  متصلة على  $\mathbb{R}^+$  حين  $x_0 = 0$

← لنحدد  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$  لدينا من ③ و ⑤

$\frac{1}{2} - \frac{1}{n} < I_n < \frac{1}{2}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} - \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

وعليه :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \frac{1}{2}$

الجزء (3)

① - لنبين أن المعادلة  $f(x) = 1$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$ .

$f$  متصلة وتزايدية قطعا على  $]0; +\infty[$  وهو :  $f$  تقابل من  $]0; +\infty[$  نحو  $]0; +\infty[$

$1 \in ]0; +\infty[$  إذن :  $\alpha_n \in ]0; +\infty[ / f(\alpha_n) = 1$

وعليه : المعادلة  $f(x) = 1$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$

ب- لنبين أن :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \alpha_n > 1$  لدينا :

$f_n(1) = e^{-\frac{1}{n}}$

$-\frac{1}{n} < 0 \Rightarrow e^{-\frac{1}{n}} < 1$  أي :

$f_n(1) < f_n(\alpha_n)$   $f_n$  متزايدة قطعا على  $]0; +\infty[$   $(\forall \alpha_n) \in ]0; +\infty[$  إذن :

$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \alpha_n > 1$

② - لنتحقق أن  $\alpha_n \ln \alpha_n = \frac{1}{n}$

$f_n(\alpha_n) = 1 \Leftrightarrow \alpha_n e^{-\frac{1}{\alpha_n}} = 1$

$\Leftrightarrow e^{-\frac{1}{\alpha_n}} = \frac{1}{\alpha_n} \quad (\alpha_n > 1)$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{\alpha_n} = \ln\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)$

$\Leftrightarrow \alpha_n \ln\left(\frac{1}{\alpha_n}\right) = -\frac{1}{n}$

$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \alpha_n \ln(\alpha_n) = \frac{1}{n}$  وهو :

③ - أ- لندرس تغيرات الدالة  $h(x) = x \ln x$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}^+$

$h'(x) = \ln x + 1 \quad (\forall x \in ]0; +\infty[)$

$h'(x) > 0 \Rightarrow \ln x > -1 \Rightarrow x > e^{-1} = \frac{1}{e}$  وهو :

$x$	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$h'(x)$		-	+
$h(x)$	0	$-\frac{1}{e}$	$+\infty$

← لتحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$  لدينا

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{2}x^2 - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{3}{2}x - 1 \right)$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{2}x - 1 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$$

ج - لندرس الفرع اللانهائي الكسبي  $(\Gamma_f)$  عند  $+\infty$  لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} \stackrel{3}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{2}x - 1 = +\infty$$

وعليه:  $(\Gamma_f)$  يقبل فرعاً شاملاً باتجاه محور

**الإرتاب**

4. أ - لنبين أن الدالة  $F$  قابلة للاشتقاق

$$F(x) = (4e^{\frac{1}{2}x} - 1) f_2(x)$$

لدينا:  $t \rightarrow f_2(t)$  متصلة على  $[0; +\infty[$

وعليه  $f_2$  تقبل دالة أصلية  $G$  على  $[0; +\infty[$  أي:

$$F(x) = G(2x) - G(x)$$

لدينا:  $2x \rightarrow x^4$  قابلة للاشتقاق على  $[0; +\infty[$

وعليه:  $G(x) \rightarrow x^4$  قابلة للاشتقاق على  $[0; +\infty[$

$$G(x) \in [0; +\infty[ \subset ]0; +\infty[$$

$$F(x) = G(2x) - G(x) \quad (\forall x \in ]0; +\infty[)$$

$$F'(x) = 2G'(2x) - G'(x)$$

$$= 2f_2(2x) - f_2(x)$$

$$= 2(2x e^{-\frac{1}{2}x}) - f_2(x)$$

$$= f_2(x) (4e^{\frac{1}{2}x} - 1)$$

$$F'(x) = (4e^{\frac{1}{2}x} - 1) f_2(x) \quad (\forall x \in ]0; +\infty[)$$

ب - لندرس تغيرات الدالة  $F$  ونخرج جدول تغيراتها.

$$F'(x) = (4e^{\frac{1}{2}x} - 1) f_2(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^{**+})$$

$$f_2(x) > 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R}^{**+})$$

$$\frac{1}{2x} > 0 \Rightarrow e^{\frac{1}{2}x} > 1$$

$$\Rightarrow 4e^{\frac{1}{2}x} > 4$$

$$\Rightarrow 4e^{\frac{1}{2}x} - 1 > 3 > 0$$

$$0 < e^{-\frac{1}{2}t} < 1 \Rightarrow 0 < t e^{-\frac{1}{2}t} < t \quad (t > 0)$$

$$\Rightarrow 0 < f_2(t) < t$$

$$\Rightarrow 0 < \int_x^{2x} f_2(t) dt < \left[ \frac{t^2}{2} \right]_x^{2x}$$

$$0 < F(x) < 2x^2 - \frac{x^2}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 2x^2 - \frac{x^2}{2} = 0 = F(0)$$

ومنه:  $F$  متصلة على اليمين في  $x_0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x)}{x} = 0$$

لدينا حسب السؤال السابق:  $(\forall x > 0)$

$$0 < \frac{F(x)}{x} < 2x - \frac{x}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x}{2} = 0$$

وعليه:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x)}{x} = 0$$

إذن  $F$  قابلة للاشتقاق في  $0$  وعليه:  $(\Gamma_f)$  يقبل نصف مماس عند  $x_0 = 0$  ومعادلتها:

$$(D): y = 0 \quad (\text{محور لافاقهيل})$$

3. أ - لنبين أن:  $e^t > t + 1 \quad (\forall t \in \mathbb{R})$

$$t \in \mathbb{R} \quad g(t) = e^t - t - 1$$

$$g'(t) = e^t - 1$$

$$g'(t) > 0 \Rightarrow e^t > 1$$

$$\Rightarrow t > 0$$

ومنه:

t	$-\infty$	0	$+\infty$
g(t)	$+\infty$	0	$+\infty$

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \quad g(t) > g(0) = 0$$

ومنه:

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \quad e^t > t + 1$$

ب - لنبين أن:

$$(\forall x > 0) \quad F(x) > -x + \frac{3}{2}x^2$$

لدينا: حسب السؤال السابق:

$$e^{-\frac{1}{2}t} > -\frac{1}{t} + 1 \quad (t > 0)$$

$$t e^{-\frac{1}{2}t} > t - 1$$

$$\int_x^{2x} f_2(t) dt > \int_x^{2x} (t-1) dt$$

$$F(x) > \left[ \frac{t^2}{2} - t \right]_x^{2x}$$

$$(\forall x > 0) \quad F(x) > -x + \frac{3}{2}x^2$$

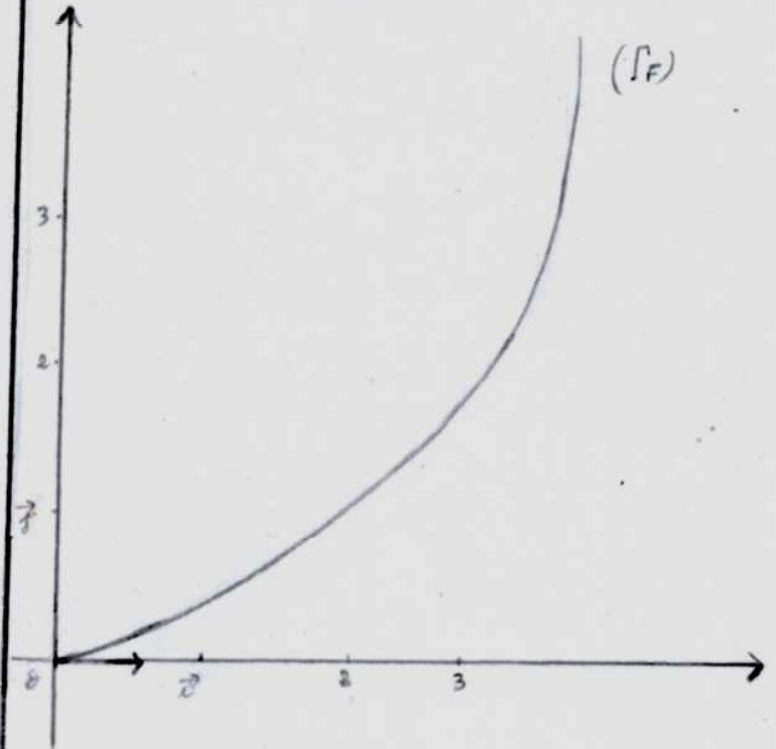
٤- ب - وسنه:  $F'(n) > 0$  ( $\forall n \in \mathbb{R}^*$ )

لذن:  $F$  تزايدية وطاق على  $[0; +\infty[$

جدول تغيرات  $F$

$x$	0	$+\infty$
$F(x)$	0	$+\infty$

٥- رسم المنحنى  $(\Gamma_F)$



هنا انجاز التامية: أمينه سامي

لحت اشرف الامتاد: المهنتي بوتغيب