الثانية علوم رياضية	فرض رقم 1	2014-2013

التمرين (1) ليكن n عددا من $\mathbb{N}$

1) بين أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ :\ \sin^{2n+1}x=\sum_{k=0}^{k=n}C_n^k(-1)^k\sin x\cos^{2k}x$

2) أحسب $(\forall k\in\mathbb{N})\quad I_k=\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\sin t\cos^{2k}t\ dt$

3) استنتج التكامل : $I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\sin^{2n+1}t\ dt$

التمرين (2) ليكن n عدد طبيعي غير منعدم نضع $U_n=\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x^2}dx$ و $U_0=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$

1) أحسب U_0

2) بين أن $(\forall n\in\mathbb{N})\quad U_{n+1}+U_n=\frac{1}{2n+1}$ و استنتج قيمة كل من U_1 و U_2

3) بين أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad 0<U_n<\frac{1}{2n+1}$ ثم حدد $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$

4) نعتبر المتتالية $(V_n)_n$ المعرفة بما يلي : $V_n=\sum_{k=0}^{k=n}\frac{(-1)^k}{2k+1}$

أ- بين أن $(\forall n\in\mathbb{N})\quad \sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k x^{2k}=\frac{1+(-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2}$

ب- استنتج أن المتتالية $(V_n)_n$ متقاربة و أن $\lim\limits_{n\to+\infty}V_n=\frac{\pi}{4}$

التمرين (3) (I) نعتبر الدالة العددية f بحيث : $f(x)=\frac{e^x}{1+x^2}$

1) أ- أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

ب- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

2) أحسب $f'(x)$ و أدرس منحى تغيرات الدالة f

3) أرسم المنحنى (C_f)

(II) لتكن F الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $F(x)=\int_0^x f(t)dt$

1) أ- بين أن $(\forall x>0)\ (\forall t\in[0,x])\quad f(t)\geq\frac{e^t}{1+x^2}$

ب- استنتج أن $(\forall x>0)\quad F(x)\geq f(x)-\frac{1}{1+x^2}$ ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$

ج- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (Γ_F) عند $+\infty$

2) بين أن F تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$

3) أ- بين أن $(\forall x<0)\quad F(x)\geq\arctan x$

ب- نقبل أن F تقبل نهاية l عند $-\infty$. بين أن $-\frac{\pi}{2}\leq l\leq 0$