تصحيح الفرض المحروس رقم 1
الدورة II

التمرين II : ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$.

① نبين أن:

$$(\forall x\in\mathbb{R}): \quad \sin^{2n+1}x = \sum_{k=0}^{n} C_n^k(-1)^k \sin x\cos^{2k}x$$

لدينا:

$$\sin^{2n+1}x = \sin x\left(\sin^2 x\right)^n$$

$$= \sin x\left(1-\cos^2 x\right)^n$$

$$= \sin x\sum_{k=0}^{n} C_n^k\left(-\cos^2 x\right)^k$$

$$= \sin x\sum_{0}^{n} C_n^k(-1)^k\cdot\cos^{2k}x$$

وبالتالي:

$$(\forall x\in\mathbb{R}): \quad \boxed{\sin^{2n+1}x = \sum_{0}^{n} C_n^k(-1)^k\sin x\cos^{2k}x}$$

(2) حساب التكامل I_k لكل k من $\mathbb{N}$:

لدينا:

$$I_k = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \sin t\cos^{2k}t\,dt$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} -\cos' t\cdot\cos^{2k}t\,dt$$

$$= \left[-\frac{\cos^{2k+1}t}{2k+1}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{x}$$

$$= \frac{-\cos^{2k+1}x}{2k+1}$$

وعليه فإن:

$$(\forall k\in\mathbb{N}); \quad \boxed{I_k = \frac{-\cos^{2k+1}x}{2k+1}}$$

(3) استنتاج التكامل المقترح:

لدينا:

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \sin^{2n+1}t\,dt$$

وحسب السؤال السابق (1) فإن:

$$(\forall t\in\mathbb{R}); \quad \sin^{2n+1}t = \sum_{0}^{n} C_n^k(-1)^k\sin t\cos^{2k}t$$

وبالتالي:

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \sin^{2n+1}t\,dt = \sum_{k=0}^{n} C_n^k(-1)^k\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\sin t\cos^{2k}t\,dt$$

وحسب السؤال (2) نجد أن:

$$I = \sum_{0}^{n} C_n^k(-1)^k\cdot\frac{-\cos^{2k+1}x}{2k+1}$$

إذن:

$$\boxed{I = -\sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k(-1)^k}{2k+1}\cdot\cos^{2k+1}x}$$

التمرين III :

ليكن n من $\mathbb{N}^*$. ونضع:

$$\begin{cases} u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \\ u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\,dx \end{cases}$$

① حساب u_0:

لدينا:

$$u_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= \int_0^1 (\operatorname{Arctg} x)'\,dx$$

$$= \left[\operatorname{Arctg} x\right]_0^1$$

$$\boxed{u_0 = \frac{\pi}{4}}$$

② نبين أن:

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*); \quad u_{n+1}+u_n = \frac{1}{2n+1}$$

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}^*$.

لدينا:

$$u_{n+1}+u_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\,dx + \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^{2n+2}+x^{2n}}{1+x^2}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^{2n}(1+x^2)}{(1+x^2)}\,dx$$

$$= \int_0^1 x^{2n}\,dx$$

$$= \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1$$

وعليه فإن:

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*); \quad \boxed{u_{n+1}+u_n = \frac{1}{2n+1}}$$

قيمة u_1:

حسب النتيجة السابقة: $u_1 + u_0 = \frac{1}{2\times 0+1}$

أي أن: $u_1 = \frac{1}{1} - u_0$

إذن: $\boxed{u_1 = 1 - \frac{\pi}{4}}$

و $u_2 + u_1 = \frac{1}{2\times 1+1}$

بمعنى أن: $u_2 = \frac{1}{3} - u_1$

$= \frac{1}{3} - 1 + \frac{\pi}{4}$

وبالتالي: $\boxed{u_2 = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}}$

3) نبين أن: $(\forall n\in\mathbb{N}^*) : 0 < u_n < \frac{1}{2n+1}$

$(\forall x\in]0,1])$ $1+x > 1$

و $x^{2n} > 0$

$\Leftarrow$ $\frac{x^{2n}}{1+x} > 0$

أي: $\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}dx > 0$

وعليه $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ ① $u_n > 0$

ومنه نستنتج أن:

$u_{n+1} > 0$

أي: $u_n + u_{n+1} > u_n$

وعليه $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; ② $u_n < \frac{1}{2n+1}$

من العلاقتين ① و ② يكون

لدينا: $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $\boxed{0 < u_n < \frac{1}{2n+1}}$

وبما أن: $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$

فإن: $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

4) لتكن المتتالية $(V_n)_n$ بحيث:

$V_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$

أ- نبين أن:

$(\forall n\in\mathbb{N}) : \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} = \frac{1+(-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2}$

لدينا:

$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} = 1 - x^2 + x^{4} + \dots + (-1)^n x^{2n}$

$= \frac{1+(-1)^n x^{2n+2}}{1-(-x^2)}$

$\boxed{\sum_{0}^{n} (-1)^k x^{2k} = \frac{1+(-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2}}$; $n\in\mathbb{N}$

ب- تقارب المتتالية $(V_n)_n$ ونهايتها:

لدينا:

$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} = \frac{1+(-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2}$

ومنه: $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 x^{2k}dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^1 (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$

$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = u_0 + (-1)^n u_{n+1}$

مع العلم أن: $\int_0^1 x^{2k}dx = \left[\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2k+1}$

وعليه: $V_n = u_0 + (-1)^n u_{n+1}$

$= \frac{\pi}{4} + (-1)^n u_{n+1}$

وبما أن: $\forall n\in\mathbb{N}$ $0 < u_{n+1} < \frac{1}{2n+3}$

فإن: $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = 0$

وعليه فإن $(V_n)_n$ متقاربة و:

$\lim_{n\to+\infty} V_n = \frac{\pi}{4}$

التمرين III :

(I) لتكن f الدالة حيث :

$$f(x)=\frac{e^x}{1+x^2}$$

1) أ- حساب النهايات المطلوبة:

لدينا $\lim_{+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1+x^2}$

$$=\lim_{+\infty}\frac{\frac{e^x}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+1}$$

$$=+\infty$$

[$\lim_{+\infty}\frac{e^x}{x^2}=+\infty$ لأن]

ولدينا

$$\lim_{-\infty}\frac{e^x}{1+x^2}=0$$

[لأن $\lim_{-\infty} e^x = 0$ و $\lim_{-\infty} 1+x^2=+\infty$]

ب- الفرع اللانهائي لـ C_f بجوار $+\infty$:

لدينا $\lim_{+\infty} f(x)=+\infty$

و لدينا $\lim_{+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{+\infty}\frac{e^x}{(x^2+1)x}$

يعني $=\lim_{+\infty}\frac{e^x}{x^3+x}$

إذن $=\lim_{+\infty}\frac{e^x/x^3}{1+\frac{1}{x^2}}$

ومنه $=+\infty$

[$\lim_{+\infty}\frac{e^x}{x^3}=+\infty$ لأن]

إذن C_f يقبل محور الأراتيب كاتجاه مقارب بجوار $+\infty$.

2- حساب $f'(x)$ ودراسة تغيرات الدالة f :

الدالة f قابلة للاشتقاق على ℝ.

و $(\forall x\in\mathbb{R})$: $f'(x)=\frac{(1+x^2)e^x-2xe^x}{(1+x^2)^2}$

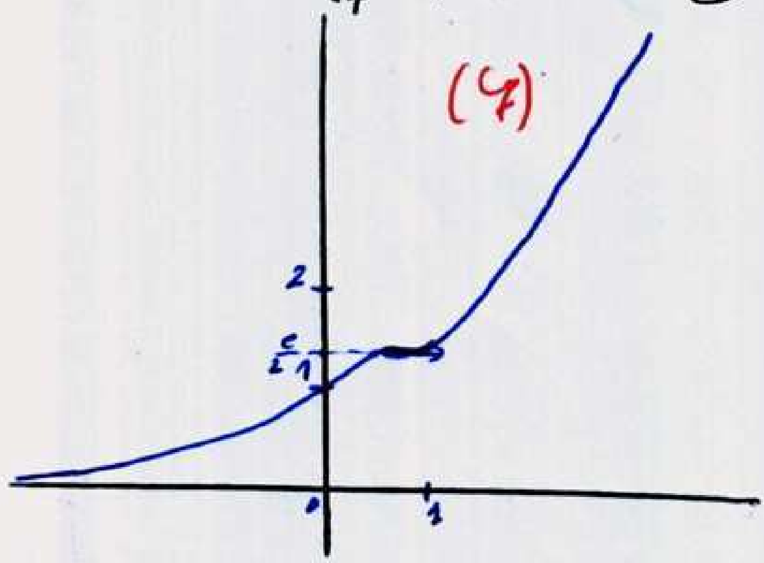
$$=\frac{e^x+x^2e^x-2xe^x}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{e^x(1+x^2-2x)}{(1+x^2)^2}$$

$$=\frac{(x-1)^2e^x}{(1+x^2)^2}\geq 0$$

إذن f تزايدية قطعا على ℝ.

3) منحنى الدالة f :



(II) نعتبر الدالة F للمتغير الحقيقي x بحيث:

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

1) أ- نبين أن: $(\forall x>0)(\forall t\in[0,x])$; $f(t)\geq\frac{e^t}{1+x^2}$

$(\forall t\in[0,x])$; $1+t^2\leq 1+x^2$

أي أن $\frac{1}{1+t^2}\geq\frac{1}{1+x^2}$

ومنه $\frac{e^t}{1+t^2}\geq\frac{e^t}{1+x^2}$

وعليه $\begin{pmatrix}\forall t\in[0,x]\\ \forall x>0\end{pmatrix}$; $\boxed{f(t)\geq\frac{e^t}{1+x^2}}$

ب- نستنتج أن:

$$(\forall x>0) : F(x)\geq f(x)-\frac{1}{1+x^2}$$

حسب الجزء (أ) من السؤال (1) لدينا

$\begin{cases}\forall x>0\\ \forall t\in[0,x]\end{cases}$: $f(t)\geq\frac{e^t}{1+x^2}$

ومنه: $(x>0)$ $\int_0^x f(t)dt\geq\int_0^x\frac{e^t}{1+x^2}dt$

يعني أن

$$F(x) \geq \frac{1}{1+x^2}\cdot\left[e^t\right]_0^x$$

$$F(x) \geq \frac{e^x}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}$$

وعليه: $(\forall x>0)$ $\boxed{F(x) \geq f(x) - \frac{1}{1+x^2}}$

وبما أن: $\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$

و $\lim\limits_{+\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$

فإن: $\boxed{\lim\limits_{+\infty} F(x) = +\infty}$

2- الفرع اللانهائي للمنحنى (Γ) عند $+\infty$:

لدينا: $\forall x>0 : F(x) \geq f(x) - \frac{1}{1+x^2}$

ومنه: $\frac{F(x)}{x} \geq \frac{f(x)}{x} - \frac{1}{x+x^3}$

وبما أن: $\lim\limits_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

و $\lim\limits_{+\infty} \frac{1}{x^3+x} = 0$

فإن: $\lim\limits_{+\infty} \frac{F(x)}{x} = +\infty$

وهذا يعني أن (Γ) له فرع شلجمي باتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$.

c) رتابة الدالة F:

لدينا $t \mapsto f(t)$ متصلة على $\mathbb{R}$.

إذن فهي تقبل دالة أصلية Φ معرفة على $\mathbb{R}$.

$\Leftarrow$ $F(x) = \Phi(x) - \Phi(0)$

وبما أن $\Phi(x)$ دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

فإن F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

و $(\forall x\in\mathbb{R})$: $F'(x) = \Phi'(x)$
$= f(x) > 0$

ومنه F تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.

3) أ- نثبت أن: $(\forall x<0)$ $F(x) \geq \text{Arctg}\, x$

نعتبر من أجل ذلك الدالة φ المعرفة كما يلي:

$(\forall x\in]-\infty,0[) : \varphi(x) = F(x) - \text{Arctg}\, x$

لدينا φ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^-$.

و $(\forall x\in\mathbb{R}^-) : \varphi'(x) = F'(x) - \text{Arctg}'(x)$

$= f(x) - \frac{1}{1+x^2}$

يعني أن: $(\forall x<0)$ $\varphi'(x) = \frac{e^x-1}{1+x^2}$

وبما أن: $x<0$ أي $e^x<1$

فإن $\varphi'(x) \leq 0$. وهذا يعني أن φ تناقصية قطعا على $]-\infty,0[$.

ومنه

$(\forall x<0) \Rightarrow \varphi(x) \geq \varphi(0) = 0$

$F(x) - \text{Arctg}\, x \geq 0$

$(\forall x<0)$ $\boxed{F(x) \geq \text{Arctg}\, x}$

ب- نقبل أن F تقبل نهاية منتهية ℓ عند $-\infty$: نبين أن $-\frac{\pi}{2} \leq \ell \leq 0$

لدينا: $(\forall x\in\mathbb{R}) : f(x) > 0$

$\Leftarrow$ $(x<0)$; $\int_0^x f(t)\,dt \leq 0$

أي: $\boxed{F(x) \leq 0}$

إذن: $(\forall x<0)$: $\text{Arctg}\, x \leq F(x) < 0$

وعليه: $\lim\limits_{-\infty} \text{Arctg}\, x \leq \lim\limits_{-\infty} F(x) \leq 0$

أي أن: $\lim\limits_{-\infty} \text{Arctg}\, x \leq \ell \leq 0$

وبما أن: $\lim\limits_{-\infty} \text{Arctg}\, x = -\frac{\pi}{2}$

فإن: $\boxed{-\frac{\pi}{2} \leq \ell \leq 0}$

وهذا هو المطلوب.

مع احتراماتي الطيبة
حمدي الإدريسي