

نوع استراف
الأساسية
بوتشعيب المائتي

حل المرفوض المرفوض رفق 1
لأسدس الثاني

مباينجار التلميذة
جهاد المرلوزي

↓

الفرع النهائي للمنتج (C_n) عند +∞

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \infty$ لدينا

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{x}$ لنسب

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1-x)^n e^{2x}}{x}$ لدينا

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x)^n \frac{e^{2x}}{2x}$

إذا كانت مرفوض

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x) = -\infty$ لدينا

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x)^n = +\infty$ إذاً

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{2x} = +\infty$ ونعطف

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{x} = +\infty$

إذا كان م فردي

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x)^n = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{2x} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{x} = -\infty$

$\forall n \in \mathbb{N}^* \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{x} = \infty$

(C_n) يقبل فرغ متناهي
بالتجاهة فتكون الرتبة بعد

3 - حساب f'_n(x)

$f'_n(x) = ((1-x)^n e^{2x})'$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = 0$ لنسب

$x = tm$ نع

$x \rightarrow -\infty \Rightarrow t \rightarrow -\infty$ إذاً

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x)^n e^{2x}$

$= \lim_{t \rightarrow -\infty} (1-tm)^n e^{2tm}$

$= \lim_{t \rightarrow -\infty} ((1-tm)e^{2t})^n$

$= \lim_{t \rightarrow -\infty} (e^{2t} - \frac{n}{2}(2te^{2t})^n)$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = 0$

$\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{2t} = \lim_{t \rightarrow -\infty} 2te^{2t} = 0$ إذاً

لنسب النهاية

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x)^n e^{2x}$ لدينا

إذا كانت م زوجي

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x) = -\infty$ لدينا

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x)^n = +\infty$ وعليه

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty$ ونعطف

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$

إذا كان م فردي

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x) = -\infty$ لدينا

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x)^n = -\infty$ وعليه

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = 0$: نعطف

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = -\infty$

$$f_2(x) - f_1(x) = (1-x)e^{2x}(1-x-1)$$

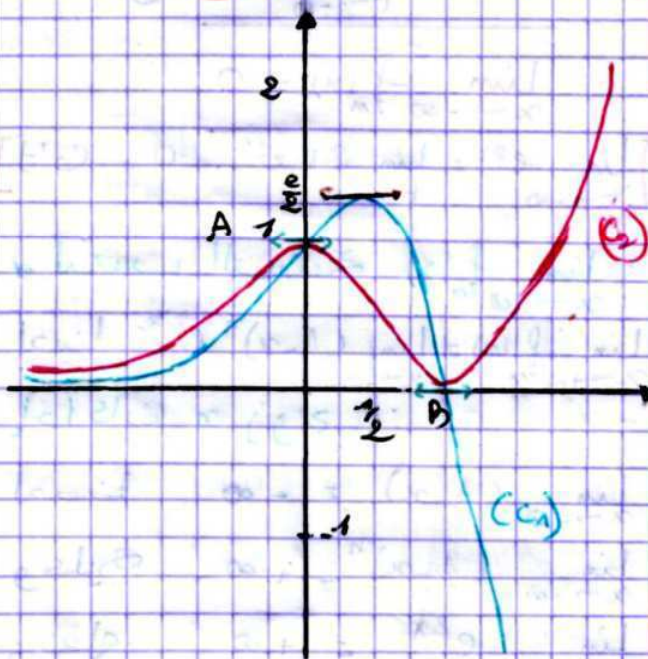
$$= x(x-1)e^{2x}$$

$$f_2(x) - f_1(x) = x(x-1)e^{2x}$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f_2(x) - f_1(x)$		+	0	+
الوضع النسبي (C) و (C')		فوق C C1	فوق C C1	فوق C C1

بصفا: $A(0,1)$ $B(1,0)$

! إنشاء المنحنىين C و C'



II. f_1 - انصبحت ان قابلية

لـ f_1 تتقارب على 0 و $-\infty$ و $+\infty$:

$f_1(t) \rightarrow 0$ على $-\infty$ و 0

$f_1(t) \rightarrow \frac{1}{1+e^{2t}}$ على $+\infty$ و 0

ان $f_1(t) \rightarrow \frac{1}{1+e^{2t}}$ على $-\infty$ و 0

فعل G قابلية $\frac{f_1(t)}{1+e^{2t}}$ ان $f_1(t) \rightarrow \frac{1}{1+e^{2t}}$ على $-\infty$ و 0

$$f'_m(x) = -m(1-x)^{m+1}e^{2x} - 2(1-x)^m e^{2x}$$

$$f'_m(x) = (1-x)^{m-1} e^{2x} (-m-2)(1-x)$$

$$f'_m(x) = (1-x)^{m-1} e^{2x} (2-2x-m)$$

بالنسبة للدالة f

$$f'_1(x) = (1-x)^0 (2-2x-1)e^{2x}$$

$$= (1-2x)e^{2x}$$

جدول التغيرات

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$f'_1(x)$		+	0	-	
$f_1(x)$			$\frac{e}{2}$		

بالنسبة للدالة f

$$f'_2(x) = (1-x)e^{2x} (2-2x-2)$$

$$= -2x(1-x)e^{2x}$$

$$f'_2(x) = 2x(x-1)e^{2x}$$

جدول التغيرات

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'_2(x)$		+	0	-
$f_2(x)$				

4- لتدرس الوضع النسبي المنحني

(C) و (C')

$$f_2(x) - f_1(x) = (1-x)^2 e^{2x} - (1-x)e^{2x}$$

$$x < t < 0 \Rightarrow e^{2x} \leq e^{2t} \leq e^{2 \cdot 1}$$

$$\Rightarrow 1 + e^{2x} \leq 1 + e^{2t} \leq 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+e^{2t}} \leq \frac{1}{1+e^{2x}}$$

$$x < t < 0 \Rightarrow f(t) > 0$$

تسب جدول التغيرات

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+e^{2t}} \leq \frac{1}{1+e^{2x}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} f_1(t) \leq \frac{f_1(t)}{1+e^{2t}} \leq \frac{f_1(t)}{1+e^{2x}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \int_x^0 f_1(t) dt \leq \int_x^0 \frac{f_1(t) dt}{1+e^{2t}} \leq \int_x^0 \frac{f_1(t) dt}{1+e^{2x}}$$

$$\frac{1}{2} \int_x^0 f_1(t) dt \leq F(x) \leq \frac{1}{1+e^{2x}} \int_x^0 f_1(t) dt$$

$$\int_x^0 f_1(t) dt = \int_x^0 (1-t)e^{2t} dt$$

$$= \left[(1-t) \times \frac{1}{2} e^{2t} \right]_x^0 - \int_x^0 \frac{1}{2} e^{2t} dt$$

$$= \left[\frac{(1-t)}{2} e^{2t} \right]_x^0 + \int_x^0 \frac{1}{2} e^{2t} dt$$

$$= \left[\frac{(1-t)}{2} e^{2t} \right]_x^0 - \left[\frac{1}{4} e^{2t} \right]_x^0$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x}$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{2} e^{2x} + \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x}$$

$$\int_x^0 f_1(t) dt = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{3}{4} e^{2x}$$

$$F(x) = G(0) - G(x)$$

ولدينا $f_1(t)$ قابلة للتفاضل في $J=]-\infty, 0[$

و $\frac{1}{1+e^{2t}}$ قابلة للتفاضل في $J=]-\infty, 0[$

اذن $\frac{f_1(t)}{1+e^{2t}}$ قابلة للتفاضل في $J=]-\infty, 0[$

وكذلك فان $G(x)$ قابلة للتفاضل في $J=]-\infty, 0[$

اذن $F(x)$ قابلة للتفاضل في $J=]-\infty, 0[$

$$F'(x) = \frac{(1-x)e^{2x}}{1+e^{2x}}$$

$$F'(x) = -G'(x)$$

$$= -\frac{f_1(x)}{1+e^{2x}}$$

$$= -\frac{(1-x)e^{2x}}{1+e^{2x}}$$

$$F'(x) = \frac{(x-1)e^{2x}}{1+e^{2x}}$$

فالتحليل من جدول التغيرات

$$x \in]-\infty, 0[$$

$$x < 0 \Rightarrow x-1 < -1 < 0$$

$$x < 0 \Rightarrow e^{2x} > 1 > 0$$

$$\Rightarrow e^{2x} + 1 > 0$$

$$F'(x) = \frac{(x-1)e^{2x}}{1+e^{2x}} < 0$$

$F \leq$ في $J=]-\infty, 0[$

$$\frac{1}{2} \int_x^0 f_1(t) dt \leq F(x) \leq \frac{1}{1+e^{2x}} \int_x^0 f_1(t) dt$$

$$x < t < 0 \Rightarrow 2x < 2t < 0$$

يعني ان $(1-x)^m > 0$ و $e^{2x} > 0$ و $-x < 0$

اذنا $\forall x \in (0,1) \quad f_{m+1}(x) - f_m(x) < 0$

المتتالية (U_n) تناقصية

اذنا $f_{m+1}(x) < f_m(x)$

$$f_{m+1}(x) < f_m(x)$$

$$\int_0^1 f_{m+1}(x) dx < \int_0^1 f_m(x) dx$$

$$U_{m+1} < U_m$$

اذنا U_n متناهية تناقصية

2- ا- لىب ان $U_n = \frac{-1}{2} + \frac{n+1}{2} U_m$

رفع $U, x \rightarrow (1-x)^{n+1}$

رفع $V, x \rightarrow \frac{1}{2} e^{2x}$

U و V متطبيتان على $[0,1]$

U و V قابلتا للتفاضل على $[0,1]$

U' و V' متطبيتان على $(0,1)$

اذنا $U_{m+1} = \int_0^1 (1-x)^{m+1} e^{2x} dx$

$$= [U(x)V(x)]_0^1 - \int_0^1 V(x)U'(x) dx$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{m+1}{2} \int_0^1 (1-x)^m e^{2x} dx$$

$$U_{m+1} = -\frac{1}{2} + \frac{m+1}{2} U_m$$

... من اجل التفاضل المتكامل

(C1) و (C2) والمشتقات $x=0$ و $x=1$

$$S = \int_0^1 |f_2(x) - f_1(x)| dx \leq a$$

$$\leq \int_0^1 |f_1(x) - f_2(x)| dx \leq a$$

$$\leq \int_0^1 f_1(x) dx - \int_0^1 f_2(x) dx \leq a$$

$$\leq (U_1 - U_2) \leq a$$

2- رفع $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = L$

اذنا $\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^0 f(t) dt = L$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{4} - \frac{2x e^{2x} - 3e^{2x}}{4}$$

$$= \frac{3}{4}$$

اذنا $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x e^{2x} = 0$

ونعلم ان

$$\frac{1}{2} \int_x^0 f(t) dt \leq F(x) \leq \frac{1}{1+e^{2x}} \int_x^0 f(t) dt$$

بسبب صيات التفاضل الترتيب

$$\frac{3}{8} < f < \frac{3}{4}$$

نجد

III - 7- ا- لىب ان $U_m > 0 \forall m \in \mathbb{N}$

اذنا $U_m = \int_0^1 f_m(x) dx$

$$0 < x < 1 \Rightarrow -1 < -x < 0$$

$$\Rightarrow 1-x > 0 \text{ و } e^{2x} > 0$$

$$\Rightarrow (1-x)^m e^{2x} > 0$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (1-x)^m e^{2x} dx > 0$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f_m(x) dx > 0$$

$$\Rightarrow U_m > 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

ب- لتعرف ان $f_{m+1}(x) - f_m(x)$ على $(0,1)$

$$f_{m+1}(x) - f_m(x) = (1-x)^{m+1} e^{2x} - (1-x)^m e^{2x}$$

$$= (1-x)^m e^{2x} (1-x-1)$$

$$= -x (1-x)^m e^{2x}$$

$$0 < x < 1 \quad \text{اذنا}$$

$$d_1 = \frac{1!}{2^0} d_1 \quad n=1 \text{ من أجل } d_1$$

علاقة عيانية

$$d_m = \frac{m!}{2^{m-1}} d_1 \quad \text{نفس صواب}$$

$$d_{m+1} = \frac{(m+1)!}{2^m} d_1 \quad \text{لنثبت أن}$$

$$d_{m+1} = |2^{m+1} - 2^{m+1}| d_1$$

$$= \left| 1 - \frac{1}{2} + \frac{m+1}{2} - \frac{m+1}{2} + \frac{m+1}{2} - \frac{m+1}{2} \right|$$

$$= \left| \frac{m+1}{2} - \frac{m+1}{2} \right|$$

$$= \frac{m+1}{2} |1 - 1|$$

$$= \frac{m+1}{2} d_m \quad \text{إذن}$$

$$d_m = \frac{m!}{2^{m-1}} d_1 \quad \text{ولدينا}$$

$$\frac{m+1}{2} d_m = \frac{(m+1)!}{2 \times 2^{m-1}} d_1$$

$$d_{m+1} = \frac{(m+1)!}{2^m} d_1$$

$$\forall m \in \mathbb{N}^* \quad d_m = \frac{m!}{2^{m-1}} d_1 \quad \text{وكل صواب}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = +\infty \quad \text{لنثبت أن}$$

$$d_{m+1} = \frac{m+1}{2} d_m \quad \text{نعلو أن}$$

$$\frac{m+1}{2} > 2 \quad \text{ولدينا}$$

$$\forall m \geq 3 \quad d_{m+1} > 2d_m \quad \text{إذن}$$

$$\frac{d_{m+1}}{d_m} > 2 \quad \text{أي}$$

$$\forall m \geq 3 \quad \text{ومما فإن}$$

$$\frac{d_n}{d_{n-1}} \times \frac{d_{n-1}}{d_{n-2}} \times \dots \times \frac{d_3}{d_2} > 2^{n-3}$$

$$S = u_1 + u_2 \quad \text{إذن}$$

وحسب السؤال (2) نعلو أن

$$u_2 = -\frac{1}{2} + u_1 = -\frac{1}{2} + u_1 = -\frac{1}{2}$$

$$S = \frac{1}{2} u_1 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$S = 2 \text{ cm}^2 \quad \text{وعليه}$$

$$\frac{1}{m+1} < u_m < \frac{1}{m-1} \quad \text{3- لنثبت أن}$$

لدينا حسب الأسئلة 1-1 و 2-1

$$0 < u_{m+1} < u_m \Rightarrow 0 < \frac{1}{2} - \frac{m+1}{2} u_m < u_m$$

$$\frac{1}{2} < \frac{m+1}{2} u_m < -\frac{1}{2} < \left(1 - \frac{m+1}{2}\right) u_m$$

$$\frac{1}{m+1} < u_m < \frac{1}{m-1} \quad \text{إذن}$$

$$\frac{1}{m+1} < u_m < \frac{1}{m-1} \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n u_n = 1 \quad \text{ب- نثبت}$$

$$\frac{1}{m+1} < u_m < \frac{1}{m-1} \quad \text{صواب}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{m+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{m-1} = 0 \quad \text{ولدينا}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \quad \text{إذن}$$

$$\frac{m}{m+1} < n u_m < \frac{m}{m-1} \quad \text{ولدينا}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{m}{m+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{m}{m-1} \quad \text{صواب}$$

$$= 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n u_n = 1 \quad \text{فإن}$$

$\forall m \in \mathbb{N}^* \quad \frac{2^{m-1}}{m!} \leq 1$ إذن

$\forall m \in \mathbb{N}^* \quad 1$ ب. لتبين أن

$$W_m \leq \frac{2e^2}{m+1}$$

$W_m = \frac{2^m}{m!} U_m$ لدينا

$\frac{2^{m-1}}{m!} \leq 1 \Rightarrow W_m \leq 2 U_m$

$U_m = \int_0^1 (1-x)^m e^{2x} dx$ مع

$0 < x \leq 1 \Rightarrow e^{2x} \leq e^2$ لدينا

$(1-x)^m \geq 0$ وعلوان

$(1-x)^m e^{2x} \leq (1-x)^m e^2$ إذن

$U_m \leq e^2 \int_0^1 (1-x)^m dx$

$U_m \leq e^2 \left[-\frac{1}{m+1} (1-x)^{m+1} \right]_0^1$

$U_m \leq \frac{e^2}{m+1}$ إذن

$\Rightarrow W_m \leq \frac{2e^2}{m+1}$

لنستنتج أن $\lim_{m \rightarrow \infty} W_m = 0$

$0 < W_m \leq \frac{2e^2}{m+1}$ لدينا

$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2e^2}{m+1} = 0$

إذن حسب خاصية النطاقات

والترتيب

$\lim_{m \rightarrow \infty} W_m = 0$

$\forall m \in \mathbb{N}^* \quad W_{m+1} = \frac{2^m}{(m+1)!} + W_m$

$W_{m+1} = \frac{2^{m+1}}{(m+1)!} U_{m+1}$ لدينا

إذن $\frac{d_m}{d_0} > 2^{m-3}$

أي $\forall m > 3 \quad d_m > d_3 \times 2^{m-3}$
بما أن $2 > 1$

$\lim_{m \rightarrow +\infty} 2^{m-3} d_3 = +\infty$

وحسب معاديتي التقارب

$\lim_{m \rightarrow +\infty} d_m = +\infty$

نفترض أن $(U_m)_{m \geq 1}$

متقاربة علوان $(U_m)_{m \geq 1}$

متقاربة ولدينا $d_m = U_m - U_{m-1}$

إذن d_m متقاربة وهذا

تناقض

إذن $(U_m)_{m \geq 1}$ متناهية متزايدة

III - 1 - أ - من أجل $n = 1$

$\frac{2^0}{1!} \leq 1$

علفة صحيحة

نفترض أن $\frac{2^{n-1}}{n!} \leq 1$

لتبين أن $\frac{2^n}{n+1} \leq 1$

$n \geq 1 \Rightarrow n+2 \geq 2$

$\Rightarrow \frac{2}{n+1} \leq 1$

ولدينا $\frac{2^{n-1}}{n!} \leq 1$

إذن

$\frac{2 \times 2^{n-1}}{n!(n+1)} \leq 1$

$\frac{2^n}{(n+1)!}$ وعلو

من أجل $n \geq 1$ لدينا

$$W_n = \frac{1}{2} \left(e^2 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{k!} \right)$$

كذلك صيغة

$$= \frac{1}{2} (e^2 - 3)$$

نقدر خزان

$$W_n = \frac{1}{2} \left(e^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{k!} \right)$$

لنبين

$$W_{n+1} = \frac{1}{2} \left(e^2 + \sum_{k=0}^{n+1} \frac{2^k}{k!} \right)$$

لدينا

$$W_{n+1} = -\frac{2^n}{(n+1)!} + W_n$$

حسب افتراض التراجع

$$W_n = \frac{1}{2} \left(e^2 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{k!} \right)$$

لدينا

$$W_{n+1} = \frac{1}{2} \left(e^2 - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{2^k}{k!} \right)$$

$$W_{n+1} = \frac{1}{2} \left(e^2 - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{2^k}{k!} - \frac{2^n}{(n+1)!} \right)$$

$$W_{n+1} = \frac{1}{2} \left(e^2 - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{2^k}{k!} \right)$$

$\forall n \in \mathbb{N}^+$

لدينا

$$W_n = \frac{1}{2} \left(e^2 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{k!} \right)$$

لدينا

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = 0$$

أي ان

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left(e^2 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{k!} \right) = 0$$

لدينا

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{k!} = e$$

انتهى

$$W_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \left(-\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2} W_n \right)$$

$$W_{n+1} = -\frac{2^n}{(n+1)!} + \frac{2^{n+1} (n+1)}{(n+1)! \cdot 2} W_n$$

$$W_{n+1} = -\frac{2^n}{(n+1)!} + \frac{2^n}{n!} W_n$$

$$= -\frac{2^n}{(n+1)!} + W_n$$

لدينا

$$W_{n+1} = -\frac{2^n}{(n+1)!} + W_n$$

ب- لنحسب مشتقة

$$\left(\frac{3-x}{2} \right) e^{2x}$$

$$\left(\left(\frac{3-x}{2} \right) e^{2x} \right)' = \left(\frac{3-x}{2} \right)' e^{2x} - \left(\frac{3-x}{2} \right) (e^{2x})'$$

$$= -e^{2x} - \left(\frac{3-x}{2} \right) e^{2x}$$

$$= -e^{2x} + (3-2x)e^{2x}$$

$$= 2e^{2x}(1-x) = 2f_n(x)$$

لدينا

$$\left(\frac{3-x}{2} \right) e^{2x} = 2f_n(x)$$

نضع

$$V(x) = \left(\frac{3-x}{2} \right) e^{2x}$$

لدينا

$$W_1 = \frac{2}{1} W_1$$

$$= 2 \int_0^1 f_n(x) dx$$

$$= \int_0^1 2f_n(x) dx = [V(x)]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} (e^2 - 3)$$

لدينا

$$W_1 = \frac{1}{2} (e^2 - 3)$$

لدينا

$$W_n = \frac{1}{2} \left(e^2 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{k!} \right)$$