دالة لوغاريتم نبيرية

التمرين الأول

أحسب ما يلي :

$\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-1}{x\ln x}$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-2\ln x}{3+\ln x}$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(2x+3)}{\sqrt[3]{x}}$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x+1}\ln\left(\dfrac{x^3+1}{x^2+2}\right)$	$\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(+2\tan x)}{x}$	$\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2+2x-3}{\ln x}$	
$\lim\limits_{x\to+\infty} (x+2)\ln x - x\ln(x+2)$	$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} (x^2-1)\ln(x^2+2x-3)$		

التمرين الثاني

الجزء (1) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي $g(x)=x-2(x+1)\ln(x+1)$

1) بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

2) أ- أحسب المشتقة $g'(x)$ و بين أن g تناقصية

ب- استنتج أن $g(x)<0$ $(\forall x\in]0,+\infty[)$

الجزء (2) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=\dfrac{\ln(1+\sqrt{x})}{x}$

1) بين أن $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=+\infty$ (يمكن وضع $t=\sqrt{x}$)

2) بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ و أعط تأويلا هندسيا للنتيجة

3) أ- بين أن $f'(x)=\dfrac{g(\sqrt{x})}{2x^2(1+\sqrt{x})}$

ب- ضع جدول تغيرات الدالة f

4) أرسم المنحنى (C_f)

التمرين الثالث

الجزء (1) نضع $g(x)=x-4+4\ln x$

1) أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} g(x)$

2) أحسب $g'(x)$ و ضع جدول التغيرات

3) أ- بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل في المجال $]1,2[$ حلا α

ب- استنتج أن $g(x)>0$ على المجال $]\alpha,+\infty[$ و $g(x)<0$ على المجال $]0,+\infty[$

الجزء (2) لتكن f الدالة العددية f المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=\left(1-\dfrac{4}{x}\right)\ln x$

دالة لوغاريتم نبيرية

1) بين أن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$ ثم أعط تأويلا هندسيا للنتيجة

2) بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$ ثم أول النتيجة هندسيا

3) أ- بين أن $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ $\quad(\forall x>0)$

ب- تحقق أن $f(\alpha)=-\dfrac{4}{\alpha}(\ln\alpha)^2$ و ضع جدول تغيرات الدالة f

4) أرسم المنحنى (C_f) (نأخذ $\alpha\simeq 1{,}75$ و $f(\alpha)\simeq -0{,}72$ و لاحظ أن $f(1)=f(4)=0$)

التمرين الرابع

لتكن f الدالة المعرفة على $]-\infty,-1[\cup[0,+\infty[$ بما يلي : $x\neq 0$; $f(x)=x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ و $f(0)=0$

الجزء (1) :

1) أ- بين أن f متصلة على يمين $x_0=0$

ب- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين $x_0=0$

2) أحسب نهايات الدالة f

3) أحسب المشتقة $f'(x)$ و أدرس منحى تغيرات الدالة f ثم ضع جدول التغيرات

4) أرسم المنحنى (ζ_f)

الجزء (2)

نعتبر الدالة g المعرفة بما يلي : $g(x)=f(-1-x)$

1) حدد مجموعة تعريف الدالة g

2) بين أن منحنى g هو مماثل منحنى الدالة f بالنسبة للمستقيم $x=-\dfrac{1}{2}$ $\quad(\Delta)$

3) أ- بين أن $f(n)<1<g(n)$ $\quad\forall n\in\mathbb{N}^*$

ب- استنتج أن $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}<e<\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}$ $\quad(\forall n\in\mathbb{N}^*)$

التمرين الخامس

نضع $U_n=\sum\limits_{k=1}^{k=n}\dfrac{1}{k}$ لكل n من $\mathbb{N}^*$

1) باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية بين أن $\dfrac{1}{k+1}\leq\ln(k+1)-\ln k\leq\dfrac{1}{k}$ $\quad(\forall k\in\mathbb{N}^*)$

2) أ - بين أن $U_{n+1}-1\leq\ln(n+1)\leq U_n$ $\quad(\forall n\in\mathbb{N}^*)$

ب- حدد النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} U_n$

3) نعتبر المتتالية $(V_n)_n$ بحيث : $V_n = U_{n+1} - \ln n \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$

و نضع $f(x) = \frac{1}{x} - \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$ و $g(x) = \frac{1}{x+1} - \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$ لكل عدد حقيقي x من المجال $]0,+\infty[$

أ- أعط جدولا تغيرات كل من f ; g

ب- استنتج أن $0 < f(n) < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$

ج- تحقق أن $V_n = \sum_{k=1}^{k=n-1} f(k)$ و استنتج أن $(V_n)_n$ متتالية تناقصية

د- بين أن $f(1) < V_n < 1 - \frac{1}{n} \quad (\forall n > 1)$ و استنتج أن المتتالية $(V_n)_n$ متقاربة ثم حدد تأطيرا لنهايتها a

التمرين السادس

ليكن n عددا من $\mathbb{N}^*$ و نعتبر الدالة f_n المعرفة بما يلي : $f_n(x) = (x-n)\ln(x) - x\ln(x-n)$

1) أ- حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $(x+1)^2 < 2x^2$

ب- بين أن $(\forall p \in \mathbb{N}) \quad p \geq 5 \Rightarrow p^2 < 2^p$

ج- أدرس إشارة كل من $f_n(n+1)$ و $f_n(n+2)$

2) أحسب $f_n'(x)$ و $f_n''(x)$ و أعط جدول تغيرات الدالة f_n

3) أ- أحسب النهاية $\lim\limits_{\substack{x \to n \\ x > n}} f_n(x)$

ب بين أن $(\forall x > n) \quad f_n(x) = -n\ln(x) - x\ln\left(1 - \frac{n}{x}\right)$

ج- أحسب النهاية $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$

4) أرسم منحنى الدالة f_3

5) أ- بين أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n

ب- بين أن $\lim\limits_{n \to +\infty} (\alpha_n - n) = 1$ ثم حدد النهاية $\lim\limits_{n \to +\infty} (\alpha_{n+1} - \alpha_n)$

التمرين السابع

الجزء (1) نعتبر الدالة g المعرفة بما يلي : $g(x) = x + 1 + \ln x$

1) أحسب $g'(x)$ و بين أن g تزايدية على $]0,+\infty[$

2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α و أن $\alpha < \frac{1}{e}$

3) استنتج إشارة الدالة $g(x)$ على المجال $]0,+\infty[$

الجزء (2) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $x \neq 0$; $f(x) = \frac{x\ln x}{x+1}$ و $f(0) = 0$

دالة لوغاريتم نبيرية

1) أ- بين أن f متصلة على يمين 0

ب- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين 0

2) أ- أحسب النهاية $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

ب- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

3) أ- بين أن $(\forall x > 0) \quad f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$

ب- بين أن $f(\alpha) = -\alpha$ ثم أنجز جدول تغيرات الدالة f

4) أرسم المنحنى (نأخذ $\alpha \simeq 0,28$)

الجزء (3) ليكن n عدد صحيح طبيعي

1) بين أن المعادلة $f(x) = n$ تقبل في المجال $]0,+\infty[$ حلا وحيدا x_n

2) بين أن $f(e^n) < n$ و استنتج أن $x_n > e^n$ ثم أحسب النهاية $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$

3) بين أن $\ln\left(\dfrac{x_n}{e^n}\right) = \dfrac{n}{x_n}$ ثم حدد $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x_n}{e^n}$

التمرين الثامن

الجزء (1) : نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$

1) حدد مجموعة تعريف الدالة f و أحسب نهايات الدالة f

2) أحسب المشتقة $f'(x)$ و ضع جدول تغيرات الدالة f

3) ليكن m عددا حقيقيا من $\mathbb{R}^{+*}$.

أ- بين أن $\dfrac{1}{m+1} \leq \ln\left(\dfrac{m+1}{m}\right) \leq \dfrac{1}{m}$

ب- استنتج أن $\left(\forall m \in \mathbb{R}^{+*}\right) \quad 0 < f(m) < \dfrac{1}{m(m+1)}$

الجزء (2) :

نضع $U_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \ldots.. + \dfrac{1}{n+n}$ و $T_n = f(n) + f(n+1) + \ldots.. + f(n+n)$ لكل n من $\mathbb{N}^*$

أ- بين أن $0 < T_n \leq \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n+1} \quad \left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$ و أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n$

ب- بين أن $T_n = U_n - \ln\left(\dfrac{2n+1}{n}\right) \quad \left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$ و استنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

ج- نضع $V_n = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots\ldots + \dfrac{(-1)^{2n}}{2n}$ بين أن $U_n - \dfrac{1}{n} \leq V_n \leq U_n + \dfrac{1}{n} \quad \left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$ ثم حدد $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$