Fonction logarithme

التمرين الأول : نعتبر الدالتين f , g المعرفتين على $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=\ln x-\frac{x-1}{x}$ و $g(x)=x-1-\ln x$

1) أ- أدرس منحى تغيرات كل من الدالتين f , g

ب- ضع جدول التغيرات لكل من الدالتين f , g

2) استنتج أن : $\frac{x-1}{x}<\ln x<x-1$ $\forall x\in]1,+\infty[$

3) بين أن $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}$ $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}\right)$

التمرين الثاني : ليكن a , b , c أعداد حقيقية موجبة قطعا . نعتبر الدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي :

$$f(x)=\ln(abx)-3\ln(a+b+x)$$

1) أ- أدرس منحى تغيرات الدالة f

ب- بين أن $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le -3\ln 3$

2) استنتج أن $abc\le\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$

التمرين الثالث : نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x)=x^2\ln(1+x)$

1) أ- أحسب كل من $f'(x)$ و $f''(x)$

ب- بين أن الدالة f تزايدية و ضع جدول تغيراتها

2) أ- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

ب- أسم المنحنى (C_f)

3) أ- بين أن المعادلة $f(x)=\frac{1}{n^2}$ تقبل حلا وحيدا β_n لكل عدد طبيعي غير منعدم n

ب- بين أن $\beta_n>0$ $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$ و أن المتتالية $(\beta_n)_n$ متقاربة

4) أ- بين أن f تقبل دالة عكسية f^{-1}

ب- استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}\beta_n$

التمرين الرابع : 1) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x)=x^3-1+2\ln x$

أ- أدرس منحى تغيرات الدالة g

ب- استنتج إشارة $g(x)$

2) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=x-1-\frac{\ln x}{x^2}$

أ- أحسب النهاية $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}f(x)$

ب- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

ج- أدرس تغيرات الدالة f و أنجز جدول تغيراتها

د- أسم المنحنى (C_f)

التمرين الخامس : نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x)=-x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{1-x}\right|$

1) حدد مجموعة تعريف الدالة f

2) بين أن الدالة f فردية

3) أحسب النهايات التالية $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)+x$ و أعط تأويلا هندسيا للنتيجتين

4) أدرس تغيرات الدالة f وأنجز جدول تغيراتها

5) بين أن $\ln(1+x) < x \quad (\forall x > 0)$

6) بين أن المنحنى (C_f) يقطع محور الأفاصيل في نقطة أفصولها a بحيث $1 < a < \sqrt{2}$

7) أدرس تقعر المنحنى (C_f) ثم أرسم المنحنى (C_f)

8) نضع $U_n = \dfrac{(n-1)!\, e^n}{n^{n-\frac{1}{2}}}$ و $V_n = \ln\left(\dfrac{U_n}{U_{n+1}}\right)$ لكل عدد طبيعي غير منعدم n

أ- بين أن $V_n = \dfrac{f(x_n)}{x_n} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$ حيث $x_n = \dfrac{1}{2n+1}$

ب- أدرس رتابة المتتالية $(U_n)_n$ و بين أنها متقاربة

التمرين السادس : نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^{+*}$ بما يلي : $f(x) = x + \ln x$

1) بين أن f تقبل دالة عكسية g يتم تحديد مجموعة تعريفها

2) ليكن n عددا طبيعيا من $\mathbb{N}^*$

أ- بين أن المعادلة $f(x) = n$ تقبل حلا وحيدا نرمز له بالرمز u_n

ب- حدد u_1

ج- أدرس رتابة المتتالية $(u_n)_n$. هل المتتالية $(u_n)_n$ متقاربة ؟

3) أ- أدرس إشارة $f(n) - n$ و استنتج أن $u_n \le n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

ب- بين أن $n - \ln(n) \le u_n \quad : \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

4) نضع $u_n = n(1 + v_n)$

أ- بين أن $\lim\limits_{n\to +\infty} v_n = 0$

ب- استنتج أن $\lim\limits_{n\to +\infty} (n v_n + \ln(n)) = 0$

التمرين السابع : ليكن n عدد طبيعي غير منعدم . نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي : $f_n(x) = nx + \ln x$

1) أ- أدرس تغيرات الدالة f_n

ب- بين أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا x_n و أن $0 < x_n < 1$

2) أ- بين أن $f_{n+1}(x) > f_n(x) \quad (\forall x > 0)$

ب- استنتج رتابة المتتالية $(x_n)_n$

3) أ- بين أن $x_n \ge \dfrac{1}{n} \quad (\forall n \ge 3)$

ب- أدرس إشارة $x - \ln x$ و استنتج أن $x_n \le \dfrac{1}{\sqrt{n}} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$

ج- بين أن $(x_n)_n$ متقاربة وحدد نهايتها

التمرين الثامن : 1) بين أن $x - \dfrac{x^2}{2} \le \ln(1+x) \le x \quad : \quad \forall x \ge 0$

2) نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي : $U_n = \sum\limits_{k=1}^{k=n} \ln\left(1 + \dfrac{k}{n^2}\right)$

أ- أحسب U_1 ; U_2

ب- بين أن $(U_n)_n$ متقاربة و حدد نهايتها (نعطي $\sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$)

3) نضع $V_n = \prod_{k=1}^{k=n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$ لكل عدد طبيعي غير منعدم n . بين أن المتتالية $(V_n)_n$ متقاربة و حد نهايتها

التمرين التاسع : (A) نضع $h(x)=\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$

1) حدد D_h و بين أن $I\left(\frac{1}{2},0\right)$ مركز تماثل منحنى الدالة h

2) أحسب النهاية $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} h(x)$

3) أحسب المشتقة $h'(x)$ و ضع جدول تغيرات الدالة h

4) أسم منحنى الدالة h

(B) نعتبر الدالة g المعرفة على $D=]0,1[$ بما يلي : $g(x)=x\ln x+(1-x)\ln(1-x)$

1) حدد نهايتي الدالة g

2) أحسب $g'(x)$ و أعط جدول التغيرات

3) استنتج إشارة $g(x)$

(C) لتكن f الدالة العددية المعرفة على $D=]0,1[$ بما يلي : $f(x)=\frac{\ln(1-x)}{\ln x}$

1) أحسب النهايتين $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)$

2) أحسب المشتقة $f'(x)$ و أدرس منحى تغيرات الدالة f ثم أنجز جدول تغيراتها

3) أسم المنحنى (C_f)

التمرين العاشر : نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^{+*}$ بما يلي : $f(x)=x+\ln x$

1) بين أن f تقبل دالة عكسية g يتم تحديد مجموعة تعريفها

2) ليكن n عددا طبيعيا من $\mathbb{N}^*$

أ- بين أن المعادلة $f(x)=n$ تقبل حلا وحيدا نرمز له بالرمز u_n و حدد u_1

ب- أدرس رتابة المتتالية $(u_n)_n$. و بين أن $u_n \le n$ $(\forall n\ge 1)$

3) أ- بين أن $\ln x < x$ $(\forall x>0)$ و استنتج أن $\frac{n}{2}<u_n$ $(\forall n\ge 1)$

ب- أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln u_n}{n}$

4) بين أن $n-\ln(n)\le u_n$: $\forall n\in\mathbb{N}^*$ و استنتج أن $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1}-u_n)=1$

5) نضع $v_n=\frac{n-u_n}{\ln n}$ $(\forall n\ge 1)$ بين أن $v_n-1=\frac{\ln\left(\frac{u_n}{n}\right)}{\ln n}$ $(\forall n\ge 1)$ ثم استنتج أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n-u_n}{\ln n}=1$