التمرين الأول

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي :

$$f(0)=0 \quad \text{و} \quad f(x)=\frac{x}{e^{x}-\ln x} \quad x>0$$

1) أ- بين أن f متصلة على يمين 0

ب- أدرس قابلية اشتقاق f على يمين 0

2) لتكن g الدالة بحيث $g(x)=e^{x}-\ln x-xe^{x}+1$

أ- أحسب $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) \;;\; \lim\limits_{x\to0^{+}} g(x)$

ب- أدرس تغيرات الدالة g

ج- بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α

د- استنتج إشارة $g(x)$

3) أ- بين أن $\forall x\in\,]0,+\infty[\;:\; f'(x)=\dfrac{g(x)}{(e^{x}-\ln x)^{2}}$

ب- ضع جدول تغيرات الدالة f

4) أرسم المنحنى (C_f) (نأخذ $\alpha\simeq1,2$ و $f(\alpha)=0,3$)

التمرين الثاني

ليكن a عددا حقيقيا موجبا قطعا و يخالف 1 .

1) نعتبر الدالة h_a المعرفة بما يلي : $h_a(x)=e^{x}-ax-a$

أدرس تغيرات الدالة h_a و استنتج إشارة $h_a(x)$ (ناقش حسب قيم a)

2) لتكن f_a الدالة العددية لمعرفة بما يلي :

$$f_a(x)=\frac{xe^{x}}{e^{x}-a}$$

أ- حدد D_a مجموعة تعريف f_a و أحسب نهايات الدالة f_a

ب- بين أن المنحنيات (C_a) تقبل نفس المقارب المائل (Δ) و أدرس الوضع النسبي ل (C_a) و (Δ)

ج- أدرس منحى تغيرات الدالة f_a

د- حدد قيم a و التي تقبل من أجلها f_a مطرافين في x_1 , x_2 ثم بين أن النقطتين $M_1(x_1,f_a(x_1))$, $M_2(x_2,f_a(x_2))$ تنتميان إلى مستقيم ثابت يتم تحديد معادلة ديكارتية له

3) نفترض أن $a=2$

أ- المعادلة $h_2(x)=0$ تقبل حلين β ; α . أعط تأطيرا للحلين باستعمال القيم المقربة التالية $e^{\frac{7}{4}}\simeq5,75$,

$e^{\frac{3}{2}}\simeq4,48$, $e^{\frac{-3}{4}}\simeq0,47$ و $e^{-1}\simeq0,37$

ب- أرسم المنحنى (C_2)

التمرين الثالث

(I) نعتبر الدالة f المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=(x+2)e^{\frac{-2}{x}} & x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1) أ- بين أن f متصلة على يمين 0

ب- أدرس قابلية اشتقاق f على يمين 0

ج- بين أن f تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$

2) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب- بين أن $\forall t\geq0 \;:\; 0\leq e^{-t}+t-1\leq\dfrac{t^{2}}{2}$

ج- بين أن $\forall x>0 \;:\; -\dfrac{4}{x}\leq f(x)-x\leq\dfrac{4}{x^{2}}-\dfrac{2}{x}$

د- استنتج الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

3) أرسم المنحنى (C_f)

(II) n عدد صحيح طبيعي غير منعدم . نعتبر الدالة f_n المعرفة على $[0,+\infty[$ كما يلي :

$$\begin{cases} f_n(x)=\left(x+\dfrac{2}{n}\right)e^{\frac{-2}{x}} & x>0 \\ f_n(0)=0 \end{cases}$$

1) بين أن f_n قابلية اشتقاق على يمين 0

2) أدرس تغيرات f_n على $]0,+\infty[$

3) أ- بين أن لكل n من $\mathbb{N}^{*}$, المعادلة $f_n(x)=\dfrac{2}{n}$ تقبل حلا وحيدا a_n في المجال $]0,+\infty[$

ب- بين أن

$$(\forall x>0)\;(\forall n\in\mathbb{N}^{*})\;\; f_{n+1}(x)-\frac{2}{x+1}>f_n(x)-\frac{2}{n}$$

ج- استنتج أن المتتالية $(a_n)_n$ تناقصية ثم بين أنها متقاربة . نضع $a=\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

د- بين أن $(\forall n\in\mathbb{N}^{*}) \quad na_n=2e^{\frac{2}{a_n}}-2$

ثم أثبت أن $a=0$

التمرين الرابع

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^{+}$ بما يلي :

$$f(x)=e^{\frac{1}{\ln x}} \quad x\neq0 \;;\; x\neq1$$

و $f(1)=0 \;;\; f(0)=1$

1) أ- بين أن f متصلة على يمين 0 و على يسار 1

ب- هل f متصلة في النقطة 1

2) أ- أدرس قابلية اشتقاق f على يمين 0 و على يسار 1

ب- أدرس الفرع اللانهائي لمنحنى الدالة f عند $+\infty$

3) أ- أحسب المشتقة $f'(x)$

ثم ضع جدول تغيرات الدالة f

4) مثل مبيانيا منحنى الدالة f

5) لتكن g قصر الدالة f على المجال $I=]1,+\infty[$

أ- بين أن g تقابل من I نحو مجال J يتم تحديده

ب- عرف دالتها العكسية g^{-1}

6) حدد مبيانيا عدد حلول المعادلة $f(x)=x+m$