

دوال أسية

التمرين الأول :

أحسب ما يلي :

$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} (x+1)e^{\frac{1}{x+1}}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x - 1)e^{-2x}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x-1)e^{x-1} - x$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - (x-1)e^x + 5$
$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} e^{\frac{1}{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x \ln x}}{x}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e^{\frac{3}{2x}} - 1 \right)$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{e^x - 1}$
$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{e^x - e^{-x}}{\sqrt{x}}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}} \right)$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x - 1)}{x}$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \ln(1+x^2)$

التمرين الثاني :

حدد مشتقة الدالة في الحالات التالية :

$f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{x^2 + 1}$	$f(x) = x^2 e^{3x}$	$f(x) = (2x+1)e^{-2x}$
$f(x) = e^x \ln x$	$f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{2e^{2x} + 3}$	$f(x) = 2x - 2 \ln(1+e^x)$
$f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$	$f(x) = (\sqrt{x})^x$	$f(x) = \sqrt{x} e^{\sqrt{x}}$

التمرين الثالث :

ليكن n عدد طبيعي غير منعدم . نعتبر الدالة f_n المعرفة بما يلي : $f_n(x) = xe^x - n$

(1) أ- أحسب نهايتي الدالة f_n

ب- أدرس تغيرات الدالة f_n و صمم جدول تغيراتها

(2) بينه أنه المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل في $]0, +\infty[$ حلا وحيدا نرمز له a_n

(3) أ- بينه أنه المتتالية $(a_n)_n$ تزايدية

ب- بينه أنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ و استنتج أنه $(\forall n \in \mathbb{N}^*) f_n\left(\frac{\ln(n)}{2}\right) < 0$

ج- حدد إشارة $f_n(\ln(n))$ حيث $n \geq 3$. و استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n}$

التمرين الرابع :

لكل f الدالة العددية المعرفة على المجال $[0,1]$ بما يلي : $f(x) = 1 - x^2 e^{1-x^2}$

(1) أ- بينه أنه f قابلة للاشفاق على $[0,1]$ و أنه : $f'(x) = 2x(x^2 - 1)e^{1-x^2}$

ب- صمم جدول تغيرات الدالة f

ج- استنتج أنه f تقابل مع $[0,1]$ نحو مجال يتم تحديده

(2) ليكن n عددا طبيعيا و بحيث $n \geq 2$.

أ- بينه أنه المعادلة $nf(x) = 1$ تقبل حلا وحيدا نرمز له بالرمز a_n

ب- بيه أه المتتالية $(a_n)_n$ تزايدية و استنتج أنها متقاربة

ج- أحسب النهاية $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$

التمرين الخامس :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي : $x > 0$; $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ و $f(0) = 0$

(1) أ- بيه أه f متصلة على يمين النقطة $x_0 = 0$

ب- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين النقطة $x_0 = 0$

(2) أدرس تغيرات الدالة f و منج جدول تغيراتها

(3) لتكن $(U_n)_n$ متتالية عددية معرفة كما يلي : $U_0 = 3$ و $U_{n+1} = f(U_n)$

أ- بيه أه $0 \leq U_n \leq 1$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$)

ب- بيه أه المتتالية $(U_n)_n$ تناقصية و استنتج أنها متقاربة

(4) أ- بيه أه $e^t \geq 1+t$ ($\forall t \geq 0$)

ب- استنتج أه $e^{-\frac{1}{x^2}} \leq \frac{1}{2}x$ ($\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$)

ج- بيه أه $U_n \leq 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) و حدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

التمرين السادس :

ليكن n عددا من \mathbb{N}^* و نعتبر الدالة f_n المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي : $f_n(x) = \frac{x-n}{x+n} - e^{-x}$

(1) دراسة الدالة f_1 و تمثيلها (نأخذ $f_1(1,54) \approx 0$)

(2) أ- أحسب النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$

ب- أحسب $f'_n(x)$ أدرس منج تغيرات الدالة f_n

ج- بيه بالترجع أه $e^{n+1} \geq 2n+1$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$) و حدد إشارة $f_n(n+1)$

د- بيه أه المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n و أه $\alpha_n \in]n, n+1[$

ه- حدد النهايتيه $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{n}$

(3) بيه أه القيمة المتوسطة للدالة f_n على المجال $[0, \alpha_n]$ تكتب $\beta_n = 1 - \frac{1}{\alpha_n} + \frac{e^{-\alpha_n}}{\alpha_n} - \frac{2n}{\alpha_n} \ln\left(1 + \frac{\alpha_n}{n}\right)$

أحسب النهاية $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n$

التمرين السابع :

الجزء (1) نعتبر الدالة g المعرفة بما يلي : $g(x) = 1 - x - e^{-2x}$

(1) أحسب النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

(2) أ- أحسب المشتقة $g'(x)$ أدرس منج تغيرات الدالة g على المجال $[0, +\infty[$

ب- أنجز جدول التغيرات على $[0, +\infty[$ و بيه أه المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في $[0, +\infty[$ حلا وحيدا a و أه $\ln \sqrt{2} < a < 1$
 (3) استنتج إشارة $g(x)$

الجزء (2) لكه f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ بما يلي : $f(x) = x\sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}$
 (1) أ- بيه أه $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و أه $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$

ب- أدرسه الفرج اللانهائي للمنحنى (C) عند $+\infty$

(2) أ- أحسب $f'(x)$ و بيه أه $f'(x) = \frac{e^{\frac{2}{x}} g\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}}$

ب- ضع جدول تغيرات الدالة f

(3) تحقق أه $f\left(\frac{1}{a}\right) = \sqrt{\frac{1}{a-a^2}}$

(4) أ- أدرسه الوضغ النسبي للمنحنى (C) و المستقيم $y = x$ (Δ)

ب- أدرسه المنحنى (C) (نأخذ $\frac{1}{a} \approx 1,25$ و $f\left(\frac{1}{a}\right) \approx 2,5$)

الجزء (3) نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي : $U_0 = 4$ و $U_{n+1} = f(U_n)$

(1) بيه أه $(\forall n \in \mathbb{N}) U_n > \frac{1}{\ln \sqrt{2}}$

(2) أدرسه رتبة المتتالية $(U_n)_n$ و استنتج أنها متقاربة

(3) أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

التمرين الثامن :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R} بما يلي : $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

(1) أحسب النهايتيه $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(2) أحسب الدالة $f'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f

(3) بيه أه f تقابل مع \mathbb{R} نحو $] -1, 1[$

(4) أعط معادلة المماس للمنحنى (C_f) في النقطة 0

(5) أدرسه (C_f) منحنى الدالة f و المنحنى (Γ) للدالة العكسية f^{-1}

(6) أ- بيه أه لكه n مع $\mathbb{N}^* - \{1\}$ المعادلة $f(x) = \frac{1}{n}$ تقبل في $]0, +\infty[$ حلا وحيدا x_n

ب- أدرسه رتبة المتتالية $(x_n)_{n>1}$ و استنتج أنها متقاربة ثم حدد النهاية $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$