التمرين الأول :

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}\ \dfrac{\ln(x)}{2} & ; \quad x\neq 1 \\ f(1)=1 \end{cases}$$

وليكن $(\mathscr{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. بين أن f دالة متصلة على المجال $]0,+\infty[$.
2. أحسب $f'(x)$ لكل $x\in]0,1[$ ولكل $x\in]1,+\infty[$ ، ثم أدرس رتابتها على كل من هذين المجالين.
3. بين أن لكل $x\in]0,1[\cup]1,+\infty[$ ، لدينا :

$$f'(x)=\frac{(x-1)-\ln(x)}{(x-1)^2}-\frac{1}{2x}$$

4. أ- بين أن لكل $x\in]0,+\infty[$ ، لدينا :

$$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$$

ب- استنتج أن f قابلة للاشتقاق في 1 وحدد $f'(1)$.

جـ- بين أن f' متصلة على المجال $]0,+\infty[$.

5. أ- بين أن :

$$\forall x\in]0,1[\cup]1,+\infty[\ :\ \ln(x)<(x-1)$$

ب- استنتج أن : $\forall x\in]1,+\infty[\ :\ f(x)<x$.

6. أنشئ $(\mathscr{C}_f)$.

التمرين الثانـــي :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي :

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{kx}{n}}$$

1. أحسب $f(0)$.
2. بين أن : $\forall x\in\mathbb{R}^*\ :\ f(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$.
3. هل الدالة متصلة في 0 ؟
4. لكل $x\in\mathbb{R}$ ، نضع : $g(x)=\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}ke^{\frac{kx}{n}}$

أحسب $g(0)$.

5. لتكن h الدالة العددية المعرفة كما يلي :

$$\forall t\in[0,+\infty[\ :\ h(t)=e^{\sqrt{t}}-\sqrt{t}$$

أ- ليكن $x\in]0,+\infty[$. باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية، بين انه يوجد عدد حقيقي c من المجال $]0,x^2[$ بحيث :

$$\frac{e^x-1-x}{x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{e^{\sqrt{c}}-1}{\sqrt{c}}\right)$$

ب- استنتج أن الدالة f قابلة للاشتقاق على يمين 0 و أحسب $f'_d(0)$.

التمرين الثالـــث :

الجزء الأول :

I. نعتبر الدالة العددية u المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$u(x)=(2-x)e^x-2$$

1. أدرس تغيرات الدالة u.
2. بين أن المعادلة $u(x)=0$ تقبل بالضبط حلين مختلفين في $\mathbb{R}$. نرمز للحل الغير المنعدم ب α . تحقق من أن : $1<\alpha<2$.
3. استنتج إشارة $u(x)$ على $\mathbb{R}$.

II. لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2}{e^x-1} & ; \quad x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

وليكن $(\mathscr{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. بين أن الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$.
2. أحسب $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)$ و $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)$ ، ثم حدد الفرعين اللانهائيين للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$.
3. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f في 0 وأعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصلة.
4. بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، و بين أن :

$$\forall x\in\mathbb{R}^*\ :\ f'(x)=\frac{x\ u(x)}{(e^x-1)^2}$$

5. ضع جدول تغيرات الدالة f.

6. أنشئ $(\mathscr{C}_f)$. (نعطي : $\alpha \approx 1,6$)

الجزء الثاني :

لتكن F الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \; : \; F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

1. بين أن F متصلة وتزايدية قطعا على $\mathbb{R}^+$.
2. لكل $x\in\mathbb{R}^+$ ، نضع : $G(x)=\int_{\ln 2}^x t^2e^{-t}dt$.

أ- باستعمال مكاملة بالأجزاء ، أحسب $G(x)$ ، ثم $\lim\limits_{x\to+\infty}G(x)$.

ب- بين أن : $\forall t\in[\ln 2,+\infty[\; : \; f(t)\le 2t^2e^{-t}$.

جـ- استنتج أن F مكبورة على $\mathbb{R}^+$. نقبل أن $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=L$ وأن $L\in\mathbb{R}$.

الجزء الثالث :

ليكن $n\in\mathbb{N}^*$.

I. 1. بين أن لكل $x>0$ ، لدينا :

$$\frac{1}{e^x-1}=e^{-x}+e^{-2x}+...+e^{-nx}+\frac{e^{-nx}}{e^x-1}$$

2. بين أن : $\forall x>0 \; : \; 0\le\int_0^x f(t)dt\le\frac{\alpha(2-\alpha)}{n}$.
3. أحسب : $I_n(x)=\int_0^x t^2e^{-nt}dt$ لكل $x\in[0,+\infty[$.
4. استنتج أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}I_n(x)=\frac{2}{n^3}$.

II. 1. بين أن لكل $x\in[0,+\infty[$ ، لدينا :

$$F(x)=\sum_{k=1}^{k=n}I_k(x)+\int_0^x f(t)e^{-nt}dt.$$

2. لتكن h_n الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي :

$h_n(x)=\int_0^x f(t)e^{-nt}dt$.

بين أن الدالة h_n تقبل نهاية منتهية I_n ، عندما يؤول x إلى $+\infty$ ،

وأن : $L-I_n=2\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+...+\frac{1}{n^3}\right)$.

3. بين أن $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية متقاربة وأن : $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$.
4. نعتبر المتتالية العددية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة بما يلي :

$$v_n=1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+...+\frac{1}{n^3}$$

بين ان $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية متقاربة وأن نهايتها L' تحقق ما يلي :

$L=2L'$.

التمرين الرابع :

لكل $n\in\mathbb{N}$ ، نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي : $f_n(x)=n\,x+\ln(x)$.

1. بين أن المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_n في $\mathbb{R}$ ، وأن $x_n\in]0,1[$.
2. أ- بين أن : $\forall x\in]0,+\infty[\; : \; f_{n+1}(x)>f_n(x)$.

ب- استنتج أن : $f_{n+1}(x_n)>0$ ، وأن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تناقصية.

3. أ- بين أن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة.

نضع : $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=l$.

ب- بين أن : $l\notin]0,1[$.

جـ- استنتج أن : $l=0$.

4. أ- بين أنه إذا كان $n\ge3>e$ ، فإن : $x_n>\frac{1}{n}$.

ب- أدرس إشارة $x-\ln(x)$ ، واستنتج أن : $x_n<\frac{1}{\sqrt{n}}$.

جـ- ماذا تستنتج ؟

التمرين الخامس :

ليكن $n\in\mathbb{N}$. نضع : $u_0=\int_0^1\frac{1}{2+t}dt$

و $u_n=\int_0^1\frac{1}{1+t+t^n}dt$

1. أحسب u_0 و u_1 .
2. بين أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تزايدية .
3. أ- بين أن : $\forall n\in\mathbb{N} \; : \; u_n\le\int_0^1\frac{1}{1+t}dt$.

ب- أحسب $\int_0^1\frac{1}{1+t}dt$. ماذا تستنتج ؟

4. أ- تحقق من أن :

$$\forall n\in\mathbb{N} \; : \; \ln 2-u_n=\int_0^1\frac{t^n}{(1+t)(1+t+t^n)}dt$$

ب- استنتج أن : $\forall n\in\mathbb{N} \; : \; \ln(2)-u_n\le\frac{1}{1+n}$.

جـ- أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

بالتوفيق إن شاء الله