

الدوال الأسية

التمرين رقم : 01

لتكن f الدالة العددية المعرفة كما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = e^{x \ln(\ln x)} & , x \neq 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

1 - حدد D_f حيز تعريف الدالة f ثم أحسب النهايات عند محددات D_f 2 - أدرس اتصال الدالة f في النقطة 03 - اضع: $h = x + 1$

$$f(x) = e^{\ln\left(\frac{\ln(1+h)}{h}\right) + \frac{h}{\ln(1+h)}[\ln(1+h)\ln(\ln(1+h))]}$$

بين أن:

b - استنتج $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{x-1}$ و أول النتيجة مبيانيا4 - نعتبر الدالة العددية g المعرفة بما يلي:

$$g(x) = 1 + \ln x \cdot \ln(\ln x)$$

a - أدرس تغيرات الدالة g و استنتج إشارتهاb - بين أن لكل x من $D_f - \{1\}$:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{\ln x} f(x)$$

c - استنتج جدولا لتغيرات الدالة f

5 - بين أن:

$$(\forall x \in D_f) \quad \ln\left(\frac{f(x)}{x}\right) = x \ln(\ln x) - \ln x$$

b - أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln(\ln x) - \ln x)$ c - استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ ثم أول هذه النتيجة هندسيا6 - أنشئ (C_f) المنحنى الممثل لدالة f في معلم متعامدمنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على \mathbb{R} بما يلي:

التمرين رقم : 02

$$f_n(x) = \frac{x}{n} - e^{-nx}$$

و (C_n) منحناها الممثل في معلم متعامد منظم (O, \vec{i}, \vec{j}) 1 - a - أحسب النهايتين: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$ b - أدرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C_n) 2 - أحسب $f_n'(x)$ لكل x من \mathbb{R} و ضع جدول تغيرات الدالة f 3 - a - بين أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n b - بين أن: $f_n\left(\frac{1}{n}\right) < 0$ c - بين أن: $e^x \geq x + 1$ ($\forall x \in \mathbb{R}$)
و استنتج أن: $f_n(1) > 0$ d - بين أن: $\frac{1}{n} < \alpha_n < 1$ 4 - أنشئ المنحنى (C_2) (نأخذ $\alpha_2 \approx 0,6$)

5 - a - بين أن:

$$(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}) \quad f_{n+1}(\alpha_n) = \frac{ne^{-(n+1)\alpha_n}}{(n+1)} \left(e^{\alpha_n} - \frac{1}{n} - 1 \right)$$

b - استنتج أن: $f_{n+1}(\alpha_n) \geq 0$ ($\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$)c - بين أن المتتالية (α_n) تناقصية ثم استنتج أنها متقاربة

6 - a - باستعمال نتيجة السؤال 3 - d بين أن:

$$(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}) \quad \frac{1}{n^2} < e^{-n\alpha_n} < \frac{1}{n}$$

b - استنتج أن: $\frac{\ln n}{n} < \alpha_n < \frac{2 \ln n}{n}$ c - حدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$

3 - a - بين أن لكل x من $]-\infty, 0[$:

$$\frac{f(x)}{x} = \left(1 - e^{\frac{1}{x}}\right) \ln\left(1 - e^{\frac{1}{x}}\right) \left(\frac{1}{1 - e^{\frac{1}{x}}}\right) + \frac{1}{x}$$

b - استنتج الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f)

4 - a - بين أن:

$$\begin{cases} f'(x) = g(x)f(x) & , x > 0 \\ f'(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2 \left(1 - e^{\frac{1}{x}}\right)} & , x < 0 \end{cases}$$

b - استنتج جدولاً لتغيرات الدالة f

5 - a - أنشئ المنحنى (C_f)

b - حدد مبانياً حسب قيم البارامتر m عدد حلول المعادلة:

$$x = \frac{1}{\ln(e - e^m) - 1}$$

الجزء الثالث:

1 - بين أن: $1 \leq f(x) < e$ ($\forall x \in [0, +\infty[$)

2 - لنكن (U_n) المتتالية العددية المعرفة بالصيغة الترجعية التالية:

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{U_n}\right)^{U_n} \end{cases} , \forall n \in \mathbb{N}$$

a - بين أن: $1 \leq U_n < e$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

b - بين أن (U_n) متتالية تزايدية واستنتج أنها متقاربة

التمرين : 03

الجزء الأول:

لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ كما يلي:

$$g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}$$

1 - أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$

2 - أحسب $g'(x)$ لكل x من $]0, +\infty[$ و ضع جدولاً لتغيرات الدالة g

3 - استنتج إشارة الدالة g على المجال $]0, +\infty[$

الجزء لثاني:

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x & , x > 0 \\ f(x) = 1 + \ln\left(1 - e^{\frac{1}{x}}\right) & , x < 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

و ليكن (C_f) منحناها الممثل في معلم متعامد ممنظم

$$(O, \vec{i}, \vec{j})$$

1 - a - حدد D_f حيز تعريف الدالة f

b - أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2 - a - بين أن f متصلة في النقطة 0

b - أدرس اشتقاق الدالة f على يمين وعلى يسار النقطة 0

ثم أول النتيجتين هندسياً

4 - a - لتكن φ الدالة المعرفة على المجال
 $\varphi(x) = e^x - \frac{1}{\sqrt{e}}x$ بما يلي: $K =]-\infty, -\frac{1}{2}]$

بين أن تناقصية على K

b - استنتج أن:

$$(\forall x \in K) \quad |e^x + a_1| \leq \frac{1}{\sqrt{e}}|x - a_1|$$

5 - نعتبر المتتالية العددية (b_n) المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} b_0 = -\frac{1}{2} \\ b_{n+1} = -e^{b_n} \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

a - بين أنه يوجد عدد حقيقي α بحيث:

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad |b_{n+1} - a_1| \leq \alpha |b_n - a_1|$$

b - بين أن المتتالية (b_n) متقاربة و حدد نهايتها

التمرين رقم : 05

نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = -1 \\ f(x) = f_1(x) = -1 + e^{\frac{x-1}{x^2}}, \quad x \in]-\infty, 1] \\ f(x) = f_2(x) = e^{x \ln \frac{x-1}{x^2}}, \quad x \in]1, +\infty[\end{cases}$$

1- حدد Df حيز تعريف الدالة f و ادرس اتصال f في النقطتين 0 و 1

2- ادرس اشتقاق f في النقطتين 0 و 1

3- ادرس تغيرات الدالة g المعرفة كما يلي :

$$g(x) = \ln \frac{x-1}{x^2} + \left(\frac{2-x}{x-1} \right)$$

(b) استنتج أن g تنعدم في نقطة α من المجال $]\frac{2}{3}, \frac{3}{2}[$

(c) حدد إشارة $g(x)$

4- نأخذ $\alpha = 1,4$ و $\frac{4}{3} \approx 1,3$ بين أن

$$f(\alpha) \approx e^{-2} \approx 0,13$$

5- ادرس تغيرات الدالة f

6- أنشئ Cf المنحني الممثل لدالة f في معلم متعامد ممنظم

(نأخذ $\ln 2 \approx 0,7$ و $\ln 3 \approx 1,1$ و $e = 2,7$)

الجزء الأول :

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$

نعتبر الدالة العددية g_n المعرفة على \mathbb{R} بما يلي:

$$g_n(x) = x + e^{-nx}$$

و (C_n) منحناها الممثل في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j})

1 - a - ادرس تغيرات الدالة g_n

b - بين أن g_n تقبل قيمة دنيا عند عدد حقيقي U_n يتم

تحديده بدلالة n

2 - a - أحسب النهايتين : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g_n(x)$

b - ادرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C_n)

3 - a - ادرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_1) و (C_2)

b - أنشئ في نفس المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) المنحنيين (C_1) و

(C_2) (نأخذ $\ln 2 \approx 0,7$ و $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$)

4 - نضع : $V_n = g_n(U_n)$

بين أن المتتاليتين $(U_n)_{n \geq 1}$ و $(V_n)_{n \geq 1}$ متقاربتين و حدد نهايتهما

الجزء الثاني :

نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على \mathbb{R} بما يلي:

$$f_n(x) = x + e^{nx}$$

و (E_n) منحناها الممثل في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{u}, \vec{v})

1 - ادرس تغيرات الدالة f_n

2 - استنتج أن المعادلة : $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا a_n

3 - a - بين أن : $-\ln 2 < a_1 < -\frac{1}{2}$

b - بين أن : $x - a_1$ و $e^x + a_1$ لهما نفس الإشارة

بالعدد a بحيث $P_n(a) < M$: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

حدد بدلالة a قيمة ممكنة ل M

لتكن f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} كما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = xe^{\frac{2}{1-x}} & , x \neq 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

و (C_f) منحناها الممثل في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j})

1 - a - أحسب النهايتين $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

2 - b - أدرس اتصال الدالة f في النقطة 0

3 - c - أدرس اشتقاق الدالة f في النقطة 0 ثم أول النتيجة هندسيا

2 - a - بين أن:

$$(\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}) \quad f'(x) = \frac{x^2 + 1}{(x-1)^2} e^{\frac{2}{1-x}}$$

2 - b - ضع جدولا لتغيرات الدالة f

3 - a - بين أن:

$$(\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}) \quad f(x) - x = \frac{e^{\frac{1}{1-x}} - 1}{1-x} \left(e^{\frac{1}{1-x}} + 1 \right) \frac{x}{1-x}$$

2 - b - حدد الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f)

4 - ليكن g قصور الدالة f على المجال $I = [0, 1[$

بين أن g تقابل من المجال I نحو مجال J يجب تحديده

5 - أنشئ المنحنيين (C_f) و $(C_{g^{-1}})$

6 - لتكن (U_n) متتالية عددية معرفة كما يلي:

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_n \in]0, 1[& , (\forall n \in \mathbb{N}^*) \\ \ln(U_{n+1}) = \ln(U_n) - \frac{2}{1-U_{n+1}} & , (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

1 - a - بين أن: $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_{n+1} = g^{-1}(U_n)$

2 - b - بين أن (U_n) تناقصية

3 - c - استنتج أن (U_n) متقاربة وحدد نهايتها

التمرين رقم 06:

لتكن f دالة تحقق الشرطين التاليين :

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) \quad f(x+y) + x + y = (f(x) + x)(f(y) + y) \quad (I)$$

$$f(1) = e - 1 \quad (II)$$

1 - a - بين أن: $(\forall t \in \mathbb{R}) \quad f(t) + t \geq 0$

2 - b - بين أنه إذا وجد عدد حقيقي x_0 بحيث:

$$f(x_0) = -x_0$$

فإن: $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x) = -x$

3 - c - بين أن: $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x) \neq -x$

4 - d - أحسب $f(0)$

2 - a - بين أن: النتيجة (E) التالية::

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}) \quad f(nx) = (f(x) + x)^n - nx$$

2 - b - أحسب $f(-x) - x$ و بين أن النتيجة (E) تبقى

صحيحة إذا كان $n \in \mathbb{Z}$

3 - a - أحسب $f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}$ بدلالة العدد e و العدد

الصحيح n

2 - b - بين أن: $(\forall x \in \mathbb{Q}) \quad f(x) = e^x - x$

4 - a - تأكد أن الدالة g المعرفة على \mathbb{R} بما يلي:

$$g(x) = e^x - x \quad (\text{تحقق الشرط } I)$$

2 - b - أدرس ومثل مبيانيا الدالة g

3 - c - استنتج أن: $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad 1 + x \leq e^x$

5 - ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ و $a \in \mathbb{R}_+^*$

$$P_n(a) = (1+a)(1+a^2) \cdots (1+a^n) \quad \text{ضع:}$$

1 - a - بين أن لكل $a \in \mathbb{R}_+^*$ المتتالية $(P_n(a))_{n \geq 1}$ تزايدية

2 - b - بين أن: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 0 < P_n(a) < e^{\frac{1-a^n}{1-a}}$

3 - c - من أجل $1 < a < 0$ بين أنه توجد أعداد M مرتبطة بالعدد