الاحتمالات

I) الوضعيات العشوائية:

1- تعريف:

- إذا رمينا قطعة نقود في الهواء فإننا لا نعلم مسبقا هل ستعين وجها أم ظهرا.
- إذا رمينا نردا مكعبا فإننا لا نعلم مسبقا الرقم الذي سيعينه.
- إن مثل هذه الوضعيات تسمى وضعيات عشوائية.

2- أمثلة:

مثال (1):

نرمي قطعة نقود في الفضاء. هناك حالتان: إما أن نحصل على P أو F.

المجموعة: $\Omega=\{P,F\}$ المكونة من جميع الإمكانيات تسمى كون الإمكانيات. وكل عنصر من Ω يسمى إمكانية.

مثال (2):

صندوق يحتوي على 4 كرات تحمل الأرقام 1، 2، 3، 4 نسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين من الصندوق.

- ليكن Ω كون الإمكانيات:

لتكن $U=\{1,2,3,4\}$ المجموعة المكونة من الكرات.

كل إمكانية هي عبارة عن تأليفة لعنصرين من بين 4 عناصر المجموعة U. إذن:

$$card\Omega=C_4^2=\frac{4.3}{2.1}=6$$

ولدينا:

$$\Omega=\{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$$

الإمكانية $\{2,3\}$ تحقق الحدث: "الحصول على كرتين مجموعهما يساوي 5 ".

والإمكانية $\{1,4\}$ كذلك.

المجموعة: $A=\{\{1,4\},\{2,3\}\}$ تسمى حدثا.

ونقول: ليكن A الحدث: " الحصول على مجموع يساوي 5 ".

3- مصطلحات:

نربط كل وضعية عشوائية بالمجموعة Ω المكونة من جميع الحالات الممكنة.

1- Ω تسمى كون الإمكانيات.

2- كل عنصر من Ω يسمى إمكانية.

3- كل جزء A من Ω يسمى حدثا. وبالتالي ستكون $P(\Omega)$ هي مجموعة الأحداث.

4- الحدث $\varnothing$ يسمى الحدث المستحيل.

5- الحدث Ω يسمى الحدث الأكيد.

6- الأحداث المكونة من إمكانية تسمى الأحداث الابتدائية.

7- ليكن A وB حدثين

- الحدث $A\cap B$ يسمى الحدث A وB.
- الحدث $A\cup B$ يسمى الحدث A أو B.
- نقول إن الحدثين A وB غير منسجمين إذا كان وفقط إذا كان $A\cap B=\varnothing$.

II) الفضاءات الاحتمالية المنتهية:

1- مثال:

نرمي نردا مكعبا وجوهه الستة مرقمة من 1 إلى 6.

كون الإمكانيات: $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$

- لدينا حظ واحد على 6 للحصول على الرقم 1.

نقول إن احتمال الحصول على 1 هو $\frac{1}{6}$ أو احتمال الحدث A "الحصول على 1 " هو $p(A)=\frac{1}{6}$.

- احتمال الاحداث الابتدائية هو:

$i\in\{1,2,3,...,6\}; p(\{i\})=\frac{1}{6}$

2- تعريف:

نعتبر المجموعة: $\Omega=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ (كون الإمكانيات) نقول إننا قد عرفنا احتمالا p على Ω إذا ربطنا كل عنصر a_i بعدد حقيقي p_i بحيث $0\le p_i\le 1$ و $\sum_{i=1}^{n}p_i=1$

ونكتب: $p(a_i)=p(\{a_i\})=p_i$

- الزوج (Ω,p) يسمى فضاء احتماليا منتهيا.

3- احتمال حدث:

ليكن (Ω,p) فضاء احتماليا منتهيا وليكن A حدثا.

احتمال الحدث A هو مجموع احتمالات الأحداث الابتدائية التي تكونه.

يعني: إذا كان: $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$

فإن: $p(A)=p(a_1)+p(a_2)+...+p(a_n)$

ملاحظة:

ليكن (Ω,p) فضاء احتماليا منتهيا.

1- ليكن A حدثا. لدينا $0\le p(A)\le 1$.

2- $p(\varnothing)=0$

3- $p(\Omega)=1$

أمثلة:

مثال 1: نعتبر $\Omega=\{P,F\}$

- نعتبر الاحتمال p_1 المعرف بما يلي:

$p_1(F)=\frac{1}{2}$, $p_1(P)=\frac{1}{2}$.

- نعتبر الاحتمال p_2 المعرف بما يلي:

$p_2(F)=\frac{1}{3}$, $p_2(P)=\frac{2}{3}$

تمرين:

نرمي نردا وجوهه مرقمة من 1 إلى 6 ومغشوش.
بحيث الوجوه التي تحمل رقما زوجيا لها نفس الاحتمال.
والوجوه التي تحمل رقما فرديا لها نفس الاحتمال.
واحتمال الحصول على رقم زوجي يضاعف احتمال الحصول على رقم فردي.

1- احسب احتمال الحصول على رقم زوجي.
2- احسب احتمال الحصول على مضاعف ل 3.
3- احسب احتمال الحصول على رقم فردي.

ليكن Ω كون الإمكانيات: $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$

لنحسب احتمال الاحداث الابتدائية.

لدينا $p(2)=p(4)=p(6)=x$

و $p(1)=p(3)=p(5)=y$

ولدينا: $x=2y$

ونعلم أن:

$$p(1)+p(2)+p(3)+p(4)+p(5)+p(6)=1$$

يعني $3y+3x=1$

يعني $3y+6y=1$

$9y=1$

إذن $y=\dfrac{1}{9}$ و $x=\dfrac{2}{9}$

إذن: $p(1)=p(3)=p(5)=\dfrac{1}{9}$

$p(2)=p(4)=p(6)=\dfrac{2}{9}$

1- ليكن A الحدث " الحصول على رقم زوجي ".

لدينا $A=\{2,4,6\}$

إذن $p(A)=p(2)+p(4)+p(6)=\dfrac{6}{9}=\dfrac{2}{3}$

2- ليكن B الحدث " الحصول على مضاعف ل 3 ".

لدينا $B=\{3,6\}$

إذن $p(B)=p(3)+p(6)=\dfrac{1}{3}$

3- ليكن C الحدث " الحصول على رقم فردي ".

لدينا $C=\{1,3,5\}$

إذن: $p(C)=p(1)+p(3)+p(5)=\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$

4- خاصيات:

ليكن (Ω,p) فضاء احتماليا منتهيا.

خاصية (1):

> ليكن A و B حدثين بحيث $A\cap B=\varnothing$
> لدينا: $p(A\cup B)=p(A)+p(B)$

برهان:

نضع $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$

و $B=\{b_1,b_2,...,b_n\}$

لدينا: $A\cap B=\varnothing$ إذن $a_i\neq b_j$

إذن: $A\cup B=\{a_1,a_2,...,a_n,b_1,b_2,...,b_n\}$

إذن

$$p(A\cup B)=p(a_1)+...+p(a_n)+p(b_1)+...+p(b_n)$$
$$=p(A)+p(B)$$

ملاحظة:

- لتكن $A_1,A_2,...,A_n$ احداثا منفصلة مثنى مثنى.

يعني: $\forall i\neq j \quad A_i\cap A_j=\varnothing$

لدينا: $p\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}p(A_i)$

خاصية (2):

> ليكن A و B حدثين.
> لدينا $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$

برهان:

لدينا $A\cup B=A\cup(B-A)$

ولدينا $A\cap(B-A)=\varnothing$

إذن: $p(A\cup B)=p(A\cup(B-A))$

$p(A\cup B)=p(A)+p(B-A)$

ولدينا:

$B=(A\cap B)\cap(B-A)$

و $(A\cap B)\cap(B-A)=\varnothing$

إذن $p(B)=p((A\cap B)\cup(B-A))$

$=p(A\cap B)+p(B-A)$

إذن $p(B-A)=p(B)-p(A\cap B)$

ومنه: $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$

خاصية (3):

> ليكن A حدثا. و $\bar{A}$ الحدث المضاد ل A.
> لدينا: $p(\bar{A})=1-p(A)$

برهان:

لدينا $A\cup\bar{A}=\Omega$ و $A\cap\bar{A}=\varnothing$

إذن $p(A\cup\bar{A})=p(\Omega)$

يعني $p(A)+p(\bar{A})=1$

إذن $p(\bar{A})=1-p(A)$

خاصية (4):

> ليكن A و B حدثين.
> إذا كان $A\subset B$ فإن $p(A)\leq p(B)$

5- فرضية تساوي الاحتمالات:

a) تعريف:

ليكن (Ω, p) فضاءا احتماليا منتهيا.
نقول إن هذا الفضاء يحقق فرضية تساوي الاحتمالات إذا وفقط إذا كان لكل الإمكانيات نفس الاحتمال.
ليكن (Ω, p) فضاءا احتماليا يحقق فرضية تساوي الاحتمالات

*) نضع: $Card\Omega = n; \Omega = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$

لنحسب احتمال الاحداث الابتدائية:

لدينا: $p(a_1) = p(a_2) = ... = p(a_n) = x$

ولدينا: $p(a_1) + p(a_2) + ... + p(a_n) = 1$

يعني: $\underbrace{x + x + ... + x}_{\text{n مرة}} = 1$

يعني $nx = 1$

يعني $x = \frac{1}{n}$

أي $x = \frac{1}{card\Omega}$

إذن: $\forall i \in \{1, 2, ..., n\} \quad p(a_i) = \frac{1}{card\Omega}$

*) ليكن A حدثا بحيث $CardA = q$

لدينا A يحتوي على q إمكانية. ولدينا $p(A)$ هو مجموع احتمالات هذه الإمكانيات.

وهذه الإمكانيات لها نفس الاحتمال $\frac{1}{n}$

إذن $p(A) = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + ... + \frac{1}{n}}_{q \text{ مرة}}$

إذن $p(A) = q.\frac{1}{n}$

$$p(A) = \frac{cardA}{card\Omega}$$

خاصية:

ليكن (Ω, p) فضاءا احتماليا منتهيا يحقق فرضية تساوي الاحتمالات.

*) احتمال الاحداث الابتدائية هو $\frac{1}{Card\Omega}$

*) إذا كان A حدثا فإن: $p(A) = \frac{CardA}{Card\Omega}$.

ملاحظة:

*) عناصر Ω تسمى الحالات الممكنة.
*) عناصر A تسمى الحالات المرغوب فيها.

$$p(a) = \frac{\text{عدد الحالات المرغوب فيها}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

*) إن فرضية تساوي الاحتمالات يمكن أن تظهر في النص بعبارة صحيحة أو بطريقة غير مباشرة. مثلا: نرمي نرد مغشوش صندوق يحتوي على كرات لا يمكن التمييز بينها باللمس...

تمارين تطبيقية:

تمرين 1

صندوق يحتوي على 5 بيضاء تحمل الأرقام 1، 2، 3، 4، 5 و 3 كرات سوداء تحمل الأرقام 1، 2، 3.
وكرتان حمراوان تحملان الرقم 1، 2.
نسحب تآنيا وعشوائيا 3 كرات من الصندوق (الكرات لا يمكن التمييز بينها باللمس).
احسب احتمال الحصول على:
1) 3 كرات بيضاء.
2) 3 كرات من نفس اللون.
3) كرة واحدة بالضبط تحمل رقما فرديا.
4) كرة واحدة على الأقل تحمل رقما زوجيا.
5) كرة واحدة على الأكثر بيضاء.
6) 3 كرات تحمل أرقاما مجموعها زوجي.
7) 3 كرات من نفس اللون وتحمل أرقاما مجموعها فردي.
8) 3 كرات مختلفة الألوان مثنى مثنى.
9) لونين بالضبط.

ليكن Ω كون الإمكانيات.
كل إمكانية هي عبارة عن تأليفة ل 3 عناصر من بين 10 عناصر المجموعة U:

$$U = \{B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, N_1, N_2, N_3, R_1, R_2\}$$

إذن: $Card\Omega = C_{10}^3 = \frac{10.9.8}{3.2} = 120$

1) ليكن A الحدث: " الحصول على 3 كرات بيضاء ".
كل إمكانية من A هي عبارة عن تأليفة ل 3 عناصر من بين عناصر المجموعة: $\{B_1, B_2, B_3, B_4, B_5\}$

إذن: $CardA = C_5^3 = \frac{5.4.3}{3.2} = 10$

إذن: $p(A) = \frac{CardA}{Card\Omega} = \frac{10}{120} = \frac{1}{12}$

2) ليكن B الحدث: " الحصول على 3 كرات من نفس اللون "
الحدث B يعني الحصول على $3B$ أو $3N$

إذن $CardB = C_5^3 + C_3^3 = 10 + 1 = 11$

إذن $p(B) = \frac{CardB}{Card\Omega} = \frac{11}{120}$

3) ليكن C الحدث: " كرة واحدة بالضبط تحمل رقما فرديا "
الحدث C يعني الحصول على $3I$ و $2P$
إذن:

$$CardC = C_6^1.C_4^2 = 6.6 = 36$$

إذن:

$$p(C) = \frac{CardC}{Card\Omega} = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}$$

4) ليكن D الحدث: " كرة واحدة على الأقل تحمل رقما زوجيا "

الحدث D يعني الحصول على: $(1I\ ;\ 2P)$ أو $(2I\ ;\ 1P)$ أو $3P$.

$$CardD = C_4^2.C_6^1 + C_4^1.C_6^2 + C_4^3$$

إذن
$$= \frac{4.3}{2}.6 + 4.\frac{6.5}{2} + 4$$

$$CardD = 100$$

إذن
$$p(D) = \frac{CardD}{Card\Omega} = \frac{100}{120} = \frac{5}{6}$$

طريقة 2: ليكن $\bar{D}$ الحدث المضاد للحدث D

الحدث $\bar{D}$ يعني الحصول على $3I$

$$Card\bar{D} = C_6^3 = 20$$

إذن:
$$p(\bar{D}) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$$

إذن
$$p(D)1 - p(\bar{D}) = \frac{5}{6}$$

5) ليكن E الحدث " كرة واحدة على الأكثر بيضاء "

الحدث E يعني الحصول $(1B\ ;\ 2\bar{B})$ أو $3\bar{B}$

إذن:
$$CardE = C_5^1.C_5^2 + C_5^3$$
$$= 5.10 + 10 = 60$$

إذن
$$p(E) = \frac{CardE}{Card\Omega} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$$

6) ليكن F الحدث " 3 كرات تحمل أرقاما مجموعها زوجي "

الحدث F يعني الحصول على $3P$ أو $(1P\ ;\ 1B_I)$

إذن
$$p(F) = \frac{CardF}{Card\Omega} = \frac{64}{120} = \frac{8}{15}$$

7) ليكن G الحدث " 3 كرات من نفس اللون أرقامها مجموعها فردي "

الحدث G يعني الحصول على $3B_I$ أو $(2B_p\ ;\ 1B_I)$

إذن:
$$CardG = C_3^3 + C_3^1.C_2^2 = 4$$

إذن
$$p(G) = \frac{CardG}{Card\Omega} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}.$$

8) ليكن H الحدث " 3 كرات مختلفة الألوان مثنى مثنى ".

الحدث H يعني الحصول على $\{1R, 1N, 1B\}$

إذن:
$$CardH = C_5^1 + C_3^1.C_2^1 = 30$$

إذن:
$$p(H) = \frac{CardH}{Card\Omega} = \frac{30}{120} = \frac{1}{4}$$

9) ليكن J الحدث " الحصول على لونين بالضبط "

الحدث J يعني $\{2B\ ; 1\bar{B}\}$ أو $\{2N\ , 1\bar{N}\}$ أو $\{2R\ , 1\bar{R}\}$

إذن:
$$CardJ = C_5^2.C_5^1 + C_3^2.C_7^1 + C_2^2.C_8^1 = 79$$

إذن:
$$p(J) = \frac{CardJ}{Card\Omega} = \frac{79}{120}$$

تمرين (2):

نرمي نردين وجوه كل واحد مرقمة من 1 إلى 6 وغير مغشوشين.
احسب احتمال الحصول على:
1) رقمين متساويين.
2) رقمين مختلفين.
3) رقمين مجموعهما زوجي.
4) رقمين مجموعهما أصغر أو يساوي 6.

نرمز لكل إمكانية ب (x,y) حيث x الرقم الذي عينه الفرد الأول و y الرقم الذي عينه الفرد الثاني. ليكن Ω كون الإمكانيات. كل إمكانية هي عبارة عن ترتيبة بتكرار لعنصرين من بين 6 عناصر E: $E = \{1,2,3,4,5,6\}$

إذن: $Card\Omega = 6^2 = 36$

1) ليكن A الحدث " الحصول على رقمين متساويين ".

لدينا: $A = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$

إذن $CardA = 6$

ومنه:
$$p(A) = \frac{CardA}{Card\Omega} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

2) ليكن B الحدث " الحصول على رقمين مختلفين. "

ليكن $\bar{B}$ الحدث المضاد للحدث B

لدينا $\bar{B} = A$ إذن $p(\bar{B}) = p(A)$

إذن
$$p(B) = 1 - p(\bar{B})$$
$$= 1 - p(A)$$

$$p(B) = 1 - p(A) = \frac{5}{6}$$

3) ليكن C الحدث " الحصول على رقمين مجموعهما زوجي ".

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

من خلال الجدول لدينا $CardC = 18$

إذن:
$$p(C) = \frac{CardC}{Card\Omega} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

4) ليكن D الحدث " الحصول على رقمين مجموعهما أصغر أو يساوي 6 "

من خلال الجدول لدينا: $CardD = 15$

إذن
$$p(D) = \frac{CardD}{Card\Omega} = \frac{15}{36}$$

III- الاحتمال الشرطي:

1) مثال:

نرمي نردين غير مغشوشين: A و B. وجوه كل واحد منهما مرقمة من 1 إلى 6.

ليكن Ω كون الإمكانيات.

لدينا: $\Omega = E\times E \ / \ E=\{1,2,3,4,5,6\}$

$Card\Omega = 36$

ليكن B الحدث: " الحصول على مجموع أكبر أو يساوي 10 "

لدينا: $B=\{(4,6),(5,5),(5,6),(6,4),(6,5),(6,6)\}$

إذن: $p(B)=\dfrac{CardB}{Card\Omega}=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$

نفترض أننا قد علمنا أن النرد A قد عين الرقم 6.

أمام هذا الخبر تصبح الحالات الممكنة:

$\{(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$

والحالات المرغوب فيها:

$\{(6,4),(6,5),(6,6)\}$

إذن احتمال B يصبح:

$$p(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

هذا الاحتمال يسمى احتمال الحدث B علما أن الحدث A قد تحقق حيث A هو الحدث " النرد A عين رقم 6 ".

ونرمز له ب $p(B/A)$ أو $P_1(B)$

إذن $P_1(B)=\dfrac{1}{2}$

ملاحظة:

$$p(B/A)=\frac{3}{6}=\frac{3/36}{6/36}$$

$$=\frac{\dfrac{Card(A\cap B)}{Card\Omega}}{\dfrac{CardA}{Card\Omega}}=\frac{P(A\cap B)}{p(A)}$$

إذن $p(B/A)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(A)}$

2) تعريف:

ليكن (Ω,p) فضاءا احتماليا منتهيا.

ليكن A وB حدثين بحيث $A\neq B$

نسمي احتمال الحدث B علما أن الحدث A محقق العدد الذي نرمز له ب $p(B/A)$ أو $p_A(B)$ والمعرف بما يلي:

$$p(B/A)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}$$

ملاحظة:

إذا كانت لدينا فرضية تساوي الاحتمالات فإن:

$$p(B/A)=\frac{Card(A\cap B)}{CardA}$$

تمارين تطبيقية:

تمرين (1):

صندوق يحتوي على 6 كرات حمراء تحمل الأرقام 0، 0، 0، 1، 1، 1 و 8 كرات بيضاء: 0، 0، 0، 1، 1، 1، 1، 1.

نسحب تآنيا كرتين من الصندوق

1) إذا كانت الكرتان المسحوبتان تحملان الرقم 1، فما هو الاحتمال لكي تكونا بيضاوين؟

2) احسب احتمال الحصول على كرتين تحملان نفس اللون علما أنهما تحملان الرقم 1.

ليكن Ω كون الإمكانيات. لدينا:

$$Card\Omega = C_{14}^2=\frac{14\times 13}{2}=91$$

1) ليكن A الحدث " الحصول على كرتين تحملان الرقم 1 "
وليكن B الحدث " الحصول على كرتين بيضاوين ".

الاحتمال المطلوب هو $p(B/A)$

لدينا: $p(B/A)=\dfrac{p(B\cap A)}{p(A)}$

ولدينا $CardA = C_9^2=36$

إذن: $p(A)=\dfrac{36}{91}$

الحدث $A\cap B$ يعني الحصول على $2B$ وتحملان الرقم 1.

إذن $Card(A\cap B)=C_5^2=10$

إذن $p(A\cap B)=\dfrac{10}{91}$

ومنه: $p(B/A)=\dfrac{\dfrac{10}{91}}{\dfrac{36}{91}}=\dfrac{10}{36}=\dfrac{5}{18}$

$$p(B/A)=\frac{5}{18}$$

2) ليكن C الحدث " الحصول على كرتين من نفس اللون "

الاحتمال المطلوب هو $p(C/A)$

$$p(C/A)=\frac{p(A\cap C)}{p(A)}$$

لدينا $p(A)=\dfrac{36}{91}$

الحدث $A\cap C$ يعني الحصول على كرتين من نفس اللون وتحملان الرقم 1. يعني الحصول على $2B_1$ أو $2R_1$

إذن: $Card(A\cap C)=C_5^2+C_4^2=10+6=16$

إذن $p(A\cap C)=\dfrac{16}{91}$

ومنه: $p(C/A)=\dfrac{p(A\cap C)}{p(A)}=\dfrac{16}{36}=\dfrac{4}{9}$

تمرين (2):

عائلة لها طفلان.

1) ما هو الاحتمال لكي يكون الطفلان ذكرين علما أن أكبرهما ذكر؟

2) ما هو الاحتمال لكي يكون الطفلان ذكرين علما أن أحدهما ذكر؟

نرمز لكل إمكانية بالزوج (x,y) حيث x الطفل الكبير و y الطفل الصغير.

ليكن Ω كون الإمكانيات. لدينا:

$$\Omega=\{(G,G);(G,F);(F,G);(F,F)\}$$

1) ليكن A الحدث " أكبر الطفلين ذكر ".

وليكن B الحدث " الطفلان ذكران ".

الاحتمال المطلوب $p(B/A)$

$$p(B/A)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}$$

لدينا: $A=\{(G,G),(G,F)\}$

و $A\cap B=\{(G,G)\}$

إذن $p(A)=\dfrac{2}{4}\quad et\quad p(A\cap B)=\dfrac{1}{4}$

إذن $p(B/A)=\dfrac{1}{2}$

2) ليكن C الحدث " أحد الطفلين ذكر ".

الاحتمال المطلوب هو $p(B/C)$

$$p(B/C)=\frac{p(B\cap C)}{p(C)}$$

لدينا: $C=\{(G,G),(G,F),(F,G)\}$

و $B\cap C=\{(G,G)\}$

إذن $p(C)=\dfrac{3}{4}\quad et\quad p(B\cap C)=\dfrac{1}{4}$

ومنه $p(B/C)=\dfrac{1}{3}$

3) صيغة الاحتمالات المركبة:

خاصية:

ليكن (Ω,p) فضاءا احتماليا منتهيا.

ليكن A و B حدثين بحيث $p(A)\neq 0$

لدينا: $p(A\cap B)=p(A).p(B/A)$

ملاحظة:

إذا كان $p(B)\neq 0$ فإن: $p(A\cap B)=p(B).p(A/B)$

تمارين تطبيقية:

تمرين (1):

صندوقان U_1 و U_2 بحيث U_1 يحتوي على $4B$ و $3R$، و U_2 يحتوي على $2B$ و $5R$.

نسحب كرتين في آن واحد من U_1 نضعهما في U_2 ثم نسحب كرتين تآنيا من U_2.

1) احسب احتمال الحصول على 4 كرات بيضاء.

2) احسب احتمال الحصول على كرة بيضاء على الأقل.

3) احسب احتمال الحصول على كرة بيضاء بالضبط.

1) ليكن A الحدث " الحصول على $2B$ في السحبة الأولى "

وليكن B الحدث " الحصول على $2B$ في السحبة الثانية ".

الاحتمال المطلوب هو $p(A\cap B)$

$$p(A\cap B)=p(A).p(B/A)$$

لدينا: $p(A)=\dfrac{C_4^2}{C_7^2}=\dfrac{2}{7}$

و $p(B/A)=\dfrac{C_4^2}{C_9^2}=\dfrac{1}{6}$

إذن: $p(A\cap B)=\dfrac{2}{7}.\dfrac{1}{6}=\dfrac{2}{42}=\dfrac{1}{21}$

ملاحظة:

يمكن تطبيق صيغة الاحتمالات المركبة بطريقة غير مباشرة بدون إبراز الحدث A و B ... كما يلي:

1) ليكن A الحدث " الحصول على $4B$ ".

نرمز لكل إمكانية ب (x,y) حيث x نتيجة السحبة (1) و y نتيجة السحبة الثانية.

الحدث A يعني الحصول على $(2B,2B)$

إذن: $p(A)=\dfrac{C_4^2}{C_7^2}.\dfrac{C_4^2}{C_9^2}=\dfrac{2}{7}.\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{21}$

2) ليكن B الحدث " الحصول على بيضاء على الأقل "

ليكن $\overline{B}$ الحدث المضاد ل B.

$\overline{B}$ يعني الحصول على $(2R,2R)$

إذن: $p(\overline{B})=\dfrac{C_3^2}{C_7^2}.\dfrac{C_7^2}{C_9^2}=\dfrac{1}{12}$

ومنه $p(B)=1-\dfrac{1}{12}=\dfrac{11}{12}$

3) ليكن C الحدث " الحصول على كرة بيضاء بالضبط "

الحدث C يعني الحصول على $(2R,\{B,R\})$ أو $(\{R,B\},2R)$

إذن $p(C)=\dfrac{C_3^2}{C_7^2}.\dfrac{C_2^1.C_7^1}{C_9^2}+\dfrac{C_4^1.C_3^1}{C_7^2}.\dfrac{C_6^2}{C_9^2}$

$$=\frac{3}{21}\cdot\frac{2.7}{36}+\frac{4.3}{21}\cdot\frac{15}{36}$$

$$p(C)=\frac{1}{18}+\frac{5}{21}$$

تمرين (2):

صندوق يحتوي على $2N;3B;4R$

نسحب بتتابع وبدون إحلال 3 كرات من الصندوق.

احسب احتمال الحصول على:

1) 3 كرات بيضاء.
2) كرة بيضاء بالضبط.
3) كرة بيضاء على الأقل.
4) 3 كرات من نفس اللون.

نرمز لكل إمكانية ب (x,y,z) حيث x نتيجة السحبة (1).

y نتيجة السحبة (2) و z نتيجة السحبة (3).

1) ليكن A الحدث " الحصول على $3B$ ".

A يعني الحصول على (B,B,B).

إذن: $p(A)=\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{1}{7}=\frac{1}{84}$.

2) ليكن B الحدث " الحصول على كرة بيضاء بالضبط ".

الحدث B يعني الحصول على $(B,\bar{B},\bar{B})$ أو $(\bar{B},B,\bar{B})$ أو $(\bar{B},\bar{B},B)$ إذن:

$$p(B)=\left(\frac{3}{9}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{5}{7}\right)+\left(\frac{6}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}\right)+\left(\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7}\right)=\frac{15}{28}$$

3) ليكن C الحدث " الحصول على بيضاء على الأقل ".

ليكن $\bar{C}$ الحدث المضاد ل C.

$\bar{C}$ يعني الحصول على $(\bar{B},\bar{B},\bar{B})$.

إذن: $p(\bar{C})=\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}=\frac{5}{21}$

ومنه: $p(C)=1-\frac{5}{21}=\frac{16}{21}$

4) ليكن D الحدث " الحصول على 3 كرات من نفس اللون "

الحدث D يعني الحصول على (R,R,R) أو (B,B,B)

إذن: $p(D)=\left(\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\right)+\left(\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{1}{7}\right)$

$$p(D)=\frac{5}{84}$$

تعميم:

$$p(A\cap B\cap C\cap D)=p(A)\,p(B/A)\,p(C/A\cap B)\,p(D/A\cap B\cap C)$$

4) صيغة الاحتمالات الكلية:

تعريف:

ليكن (Ω,p) فضاءا احتماليا منتهيا.

نقول إن الأحداث $A_1,A_2,\dots,A_n$ أحداثا تكون تجزيئا ل Ω إذا وفقط إذا كان: $\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\Omega$

و $\forall i\neq j\quad A_i\cap A_j\neq\varnothing$

مثال:

A و $\bar{A}$ يكونان تجزيئا ل Ω.

خاصية (صيغة الاحتمالات الكلية):

ليكن (Ω,p) فضاءا احتماليا منتهيا.

$A_1,A_2,\dots,A_n$ أحداثا تكون تجزيئا ل Ω

لكل حدث B لدينا:

$$p(B)=p(A_1)\,p(B/A_1)+p(A_2)\,p(B/A_2)+\dots+p(A_n)\,p(B/A_n)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}p(A_i)\,p(B/A_i)$$

برهان:

لدينا $B\subset\Omega$

إذن $B=B\cap\Omega$

$$=B\cap(A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n)$$
$$=(B\cap A_1)\cup(B\cap A_2)\cup\dots\cup(B\cap A_n)$$

ولدينا

$$\forall i\neq j\quad (B\cap A_i)\cap(B\cap A_j)=\varnothing$$

لأن $(B\cap A_i)\subset A_i$

و $(B\cap A_j)\subset A_j$ و $A_i\cap A_j\neq\varnothing$

إذن:

$$p(B)=p(A_1\cap B)+p(A_2\cap B)+\dots+p(A_n\cap B)$$
$$=p(A_1)\,p(B/A_1)+p(A_2)\,p(B/A_2)+\dots+p(A_n)\,p(B/A_n)$$

تمارين تطبيقية:

تمرين (1):

نعتبر 3 صناديق U_1,U_2,U_3 بحيث U_1 يحتوي على $2B$ و $3N$ و U_2 يحتوي على $3B$ و $4N$ و U_3 يحتوي على $5B$ و $3N$.

نختار عشوائيا صندوقا من بين الصناديق الثلاثة، ونسحب منه تآنيا كرتين.

1) احسب احتمال الحصول على كرتين بيضاوين.
2) إذا علمنا أن الكرتين المسحوبتين من نفس اللون، فما هو الاحتمال لكي تكونا مسحوبتين من U_3؟

الحل

1) ليكن A الحدث " الحصول على كرتين بيضاوين "

ليكن A_i الحدث " اختيار الصندوق U_i " $i\in\{1,2,3\}$

لدينا: $p(A_i)=\frac{1}{3}$

لدينا الأحداث A_1, A_2, A_3 تكون تجزيئا ل Ω. إذن حسب صيغة الاحتمالات الكلية لدينا:

$$p(A)=p(A_1)p(A/A_1)+p(A_2)p(A/A_2)+p(A_3)p(A/A_3)$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{C_2^2}{C_5^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{C_3^2}{C_7^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{C_5^2}{C_8^2}$$

$$p(A)=\frac{1}{5}$$

ملاحظة:

يمكن تطبيق صيغة الاحتمالات الكلية بطريقة غير مباشرة كما يلي:

نرمز لكل إمكانية بالزوج (x,y) حيث x نتيجة اختيار الصندوق و y نتيجة السحب.

ليكن A الحدث " الحصول على $2B$ ".

الحدث A يعني الحصول على $(U_1;2B)$ أو $(U_2,2B)$ أو $(U_3,2B)$.

إذن $$p(A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{C_2^2}{C_5^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{C_3^2}{C_7^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{C_5^2}{C_8^2}=\frac{1}{5}$$

2) ليكن B الحدث " الكرتان المسحوبتان من نفس اللون "

ليكن A_3 الحدث " اختيار الصندوق U_3 ".

الاحتمال المطلوب هو $p(A_3/B)$

لدينا: $$p(A_3/B)=\frac{p(A_3\cap B)}{p(B)}$$

ولدينا $(A_3\cap B)$ يعني الحصول على $(U_3,2B,2N)$

إذن: $$p(A_3\cap B)=\frac{1}{3}\left(\frac{C_5^2+C_3^2}{C_8^2}\right)=\frac{13}{84}$$

ولدينا B يعني الحصول على $(U_1,2B,2N)$ أو $(U_2,2B,2N)$ أو $(U_3,2B,2N)$.

إذن:

$$p(B)=\frac{1}{3}\cdot\frac{C_2^2+C_3^2}{C_5^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{C_3^2+C_4^2}{C_7^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{C_5^2+C_3^2}{C_8^2}=\frac{307}{420}$$

ومنه: $$p(A_3/B)=\frac{65}{307}$$

تمرين (2):

صندوق يحتوي على 3 نرود. النرد A له وجهان يحملان رقما زوجيا و 4 أوجه تحمل أرقاما فردية.

النرد B له 3 أوجه تحمل رقم زوجي و3 أوجه تحمل رقم فردي.

النرد C له 5 أوجه تحمل رقم زوجي ووجه يحمل رقم فردي.

اخترنا عشوائيا أحد النرود ورميناه فإذا به يعين رقما زوجيا.

ما هو الاحتمال لكي يكون النرد الذي تم رميه هو النرد C؟

الحل

نرمز لكل إمكانية بالزوج (x,y) حيث x نتيجة اختيار النرد و y نتيجة رمي النرد.

ليكن E الحدث " الحصول على رقم زوجي ".

ليكن F الحدث " اختيار النرد C.

الاحتمال المطلوب هو $p(F/E)$.

لدينا: $$p(F/E)=\frac{p(E\cap F)}{p(E)}$$

ولدينا $(E\cap F)$ يعني: (C,R).

إذن: $$p(E\cap F)=\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{18}$$

ولدينا E يعني (A,P) أو (B,P) أو (C,P).

إذن $$p(E)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{6}=\frac{10}{18}$$

ومنه: $$p(F/E)=\frac{1}{2}$$

5) الاستقلالية:

a) الأحداث المستقلة:

تعريف:

ليكن (Ω,p) فضاءا احتماليا منتهيا.

نقول إن الحدثين A وB مستقلين إذا وفقط إذا كان:

$$p(A\cap B)=p(A).p(B)$$

ملاحظة:

لدينا: $$p(A\cap B)=p(A).p(B)$$

يعني: $$p(A).p(B/A)=p(A).p(B)$$

يعني: $$p(B/A)=p(B)$$

ويعني كذلك:

$$p(A)=p(A/B)$$

إذن يكون الحدثان A وB مستقلين إذا وفقط إذا كان تحقيق أحدهما لا يؤثر على تحقيق الآخر.

تمرين:

نعتبر تلميذين x وy اجتازا اختبارا.

احتمال نجاح التلميذ x هو $\frac{1}{3}$ واحتمال نجاح y هو $\frac{2}{5}$

1) احسب احتمال نجاح التلميذين معا.
2) احسب احتمال نجاح التلميذ x فقط.
3) احسب احتمال نجاح تلميذ واحد فقط.
4) احسب احتمال نجاح تلميذ واحد على الأقل.

الحل

1) ليكن A الحدث " نجاح التلميذ x "

وليكن B الحدث " نجاح التلميذ y ".

الاحتمال المطلوب هو $p(A\cap B)$

من خلال النص يظهر أن الحدثين A و B مستقلان.

إذن: $$p(A\cap B)=p(A).p(B)=\frac{2}{15}$$

ملاحظة:

يمكن تطبيق صيغة الاستقلالية بطريقة غير مباشرة كما يلي:
نرمز لكل إمكانية بالزوج (a,b) حيث a هي نتيجة x و b نتيجة التلميذ y

R يعني نجاح التلميذ و $\bar{R}$ عدم نجاحه

1) ليكن E الحدث " نجاح x و y ".
E يعني (R,R).

إذن: $$p(E)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}=\frac{2}{15}$$

2) ليكن F الحدث " نجاح التلميذ x فقط "
F يعني $(R,\bar{R})$

إذن: $$p(F)=\frac{1}{3}\left(1-\frac{2}{5}\right)=\frac{1}{5}$$

3) ليكن G الحدث " نجاح تلميذ واحد فقط ".
G يعني $(R,\bar{R})$ أو $(\bar{R},R)$

إذن: $$p(G)=\frac{1}{3}\left(1-\frac{2}{5}\right)+\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{2}{5}$$
$$p(G)=\frac{7}{15}$$

4) ليكن H الحدث " نجاح تلميذ على الأقل "
ليكن $\bar{H}$ الحدث المضاد ل H.
$\bar{H}$ يعني $(\bar{R},\bar{R})$:

إذن: $$p(\bar{H})=\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{5}\right)=\frac{2}{5}$$

ومنه $$p(H)=1-p(\bar{H})=1-\frac{2}{5}$$
$$p(H)=\frac{3}{5}$$

b) الاختبارات المستقلة:

تعريف:

يمكن لتجربة أن تكون مكونة من اختبار واحد أو من عدة اختبارات، ونقول إن هذه الاختبارات مستقلة إذا كانت نتائج إحداها لا تؤثر على الباقي.

أمثلة:

1) إذا رمينا قطعة نقود عدة مرات فإن الاختبارات تكون مستقلة.
2) السحب بتتابع وبإحلال يشكل اختبارات مستقلة.
3) إذا رمينا نفس النرد عدة مرات تكون الاختبارات مستقلة.
4) إذا كانت تجربة تتكرر في نفس الظروف فإن الاختبارات تكون مستقلة.

تمرين:

نرمي نرد وجهه مرقمة من 1 إلى 6، 5 مرات.
احسب احتمال الحصول على مضاعف ل 3 مرتين بالضبط.

– نرمز لكل إمكانية ب (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) حيث x_i هي نتيجة الرمية رقم i.

. ليكن A الحدث " الحصول على مضاعف ل 3 في رمية واحدة "

لدينا $$p(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

. ليكن B الحدث " الحصول على مضاعف ل 3 مرتين بالضبط"

الحدث B يعني " الحدث A يتحقق مرتين بالضبط "
إذن الحدث B مكون من الخماسيات المكونة من $2A$ و $3\bar{A}$
ومن أجل تكوين خماسيات من هذا النوع يكفي اختيار مكانين ما بين 5 أماكن نضع فيها A و $\bar{A}$ في الباقي.
وعدد إمكانيات اختيار مكانين من بين 5 أماكن هو C_5^2
إذن عدد هذه الخماسيات هو C_5^2.
واحتمال كل واحد منها هو:

$$p=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(1-\frac{1}{3}\right)^3$$

إذن: $$p(B)=C_5^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(1-\frac{1}{3}\right)^3$$
$$p(B)=640$$

خاصية:

نعتبر n اختبار مستقل.
ليكن A حدث احتمال تحققه في اختبار واحد هو p، ولا يتغير خلال الاختبارات.
ليكن B الحدث " الحدث A يتحقق K مرة بالضبط ".

لدينا: $$p(B)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$$

برهان:

نفس الطريقة المتبعة في التمرين السابق.

تمارين تطبيقية:

تمرين (1):

صندوق يحتوي على $2N,4R,3B$.
نسحب تآنيا 3 كرات من الصندوق ونعيد هذه التجربة 6 مرات مع إرجاع الكرات بعد كل تجربة.
– ما هو احتمال الحصول على 3 كرات من نفس اللون 4 مرات بالضبط؟

الحل

– ليكن A الحدث " الحصول على 3 كرات من نفس اللون في سحبة واحدة ".

لدينا $$p(A)=\frac{C_3^3+C_4^3}{C_9^3}=\frac{5}{84}$$

– ليكن B الحدث " الحصول على 3 كرات من نفس اللون 4 مرات بالضبط ".
الحدث B يعني " الحدث A يتحقق 4 مرات ".
إذن:

$$p(B)=C_6^4\,p(A)^4\left(1-p(A)\right)^{6-4}$$
$$p(B)=C_6^4\left(\frac{5}{84}\right)^4\left(\frac{79}{84}\right)^2$$

تمرين (2):

صندوق يحتوي على $2N,4R,3B$
نسحب بتتابع وبإحلال 6 كرات من الصندوق.
ما هو احتمال الحصول على كرة حمراء مرتين بالضبط؟

الحل

ليكن A الحدث " الحصول على كرة حمراء في سحبة واحدة "

لدينا: $p(A)=\frac{4}{9}$

ليكن B الحدث " الحصول على كرة حمراء مرتين بالضبط "
B يعني " الحدث A يتحقق مرتين بالضبط ".

إذن: $p(B)=C_6^2\,p(A)^2\left(1-p(A)\right)^{6-2}$

$$p(B)=C_6^2\left(\frac{4}{9}\right)^2\left(\frac{5}{9}\right)^4$$

تمرين (3):

رام يتمرن على إصابة هدف.
احتمال إصابة الهدف في طلقة واحدة هو: $p=\frac{2}{3}$
ما هو احتمال إصابة الهدف 6 مرات بعد 20 طلقة؟

الحل

ليكن A الحدث " إصابة الهدف في طلقة واحدة ".

لدينا: $p(A)=\frac{2}{3}$

ليكن B الحدث " إصابة الهدف 6 مرات ".
B يعني " الحدث A يتحقق 6 مرات بالضبط ".

إذن $p(B)=C_{20}^6\left(\frac{2}{3}\right)^6.\left(1-\frac{2}{3}\right)^{14}$

$$p(B)=C_{20}^6\left(\frac{2}{3}\right)^6\left(\frac{1}{3}\right)^{14}$$

تمرين (4):

يقوم مراقب بزيارة تجار في مدينة، وعددهم 20.
في كل زيارة الاحتمال لكي يجد المراقب التاجر موجودا هو $p=\frac{2}{5}$
قام المراقب ب 10 زيارات. ما هو الاحتمال لكي يكون المراقب قد وجد 6 تجار.

الحل

ليكن A الحدث " المراقب يجد التاجر في زيارة واحدة "

لدينا $p(A)=\frac{2}{5}$

ليكن B الحدث " المراقب يجد 6 تجار في الزيارات العشر "
B يعني " الحدث A يتحقق 6 مرات بالضبط "

إذن: $p(B)=C_{10}^6\left(\frac{2}{5}\right)^6.\left(1-\frac{2}{5}\right)^4$

$$p(B)=C_{10}^6\left(\frac{2}{5}\right)^6\left(\frac{3}{5}\right)^4$$

تمرين (5):

يحتوي صندوق على 4 كرات حمراء و 3 كرات خضراء.
نسحب كرة واحدة من الصندوق.
* إذا كانت حمراء نسحب تآنيا كرتين من بين باقي الكرات.
* إذا كانت خضراء نسحب بتتابع وبدون إحلال كرتين من بين باقي الكرات.

1) a) ما هو عدد الحالات الممكنة؟
b) احسب احتمال الحصول على 3 كرات من نفس اللون.
2)إذا علمنا أنه حصلنا على كرتين خضراوين بالضبط، فما هو الاحتمال لكي تكون الكرة الأولى المسحوبة خضراء؟

الحل

1) نرمز لكل إمكانية ب (x,y) حيث x نتيجة السحبة الأولى و y نتيجة السحبة الثانية.
a) ليكن Ω كون الإمكانيات.
الحالات الممكنة مكونة من:
– الحالات التي نحصل فيها على كرة حمراء في السحبة الأولى وعددها هو: $4.C_6^2=4\times15=60$
– الحالات التي نحصل فيها على كرة خضراء في السحبة الأولى وعددها هو: $3\times6\times5=90$
ومنه:
$$Card\Omega=150$$
b) ليكن A الحدث " الحصول على 3 كرات من نفس اللون "
A يعني الحصول على $(R,2R)$ أو $(V,(V,V))$
إذن:
$$p(A)=\frac{4}{7}.\frac{C_3^2}{C_6^2}+\frac{3}{7}.\left(\frac{2}{6}.\frac{1}{5}\right)$$
$$p(A)=\frac{1}{7}$$
2) ليكن B الحدث " الحصول على $2V$ بالضبط ".
ليكن C الحدث " الكرة الأولى خضراء "
الاحتمال المطلوب هو $p(C/B)$

لدينا $p(C/B)=\frac{p(C\cap B)}{p(B)}$

– لدينا $B\cap C$ يعني $(V,(V,R))$ أو $(V,(R,V))$

إذن: $p(B\cap C)=\frac{3}{7}.\frac{2}{6}.\frac{4}{5}+\frac{3}{7}.\frac{4}{6}.\frac{2}{5}$
$$=2.\left(\frac{3}{7}.\frac{2}{6}.\frac{4}{5}\right)=\frac{8}{35}$$

- الحدث B يعني $\left(V,\left(V,R\right)\right)$ أو $\left(V,\left(R,V\right)\right)$ أو $\left(R,\left\{2V\right\}\right)$.

إذن: $$p\left(B\right)=\frac{8}{35}+\frac{4}{7}.\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{12}{35}$$

ومنه: $$p\left(C/B\right)=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$$