سلسلة 1	الأعداد العقدية حلول مقترحة	السنة 2 بكالوريا علوم رياضية

تمرين 1 :

$z_1=(5i-1)(i+3)$
$z_1=5i^2+15i-i-3$
$z_1=-5+14i-3$
$z_1=-8+14i$

$z_2=(7i-1)^2$
$z_2=(7i)^2-14i+1$
$z_2-49-14i+1$
$z_2=-48-14i$

$z_3=(i+2)^3$
$z_3=i^3+3\times i^2\times 2+3\times i\times 2^2+2^3$
$z_3=-i-6+12i+8$
$z_3=2+11i$

$z_4=(3-i)^4$
$z_4=\left[(3-i)^2\right]^2$
$z_4=(9-6i+i^2)^2$
$z_4=(9-6i-1)^2$
$z_4=(8-6i)^2$
$z_4=64-96i+(6i)^2$
$z_4=64-96i-36$
$z_4=28-96i$

$z_5=\frac{5}{2-i}+\frac{3-i}{2+i}$
$z_5=\frac{5(2+i)}{2^2-i^2}+\frac{(3-i)(2-i)}{2^2-i^2}$
$z_5=\frac{10+5i}{4+1}+\frac{6-3i-2i+i^2}{4+1}$
$z_5=\frac{10+5i+6-5i-1}{5}=\frac{15}{5}=3$

$z_6=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{30}$
$z_6=\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)^{15}$
$z_6=\left(\frac{2}{4}+i-\frac{2}{4}\right)^{15}$
$z_6=i^{15}=(i^2)^7\times i=-i$

تمرين 2 :

بوضع $z=x+iy$ نجد :

$5z+7\bar{z}+4i-3=0$
$5(x+iy)+7(x-iy)+4i-3=0$
$5x+5iy+7x-7iy+4i-3=0$
$12x-2iy=3-4i$

منه : $\begin{cases}12x=3\\-2y=-4\end{cases}$ منه : $\begin{cases}x=\frac{1}{4}\\y=2\end{cases}$ منه : $z=\frac{1}{4}+2i$ بالتالي : $S=\left\{\frac{1}{4}+2i\right\}$

$(1-i)z-3i\bar{z}=1+4i$

بوضع $z=x+iy$ ، $(x,y)\in IR^2$ نجد :

$(1-i)(x+iy)-3i(x-iy)=1+4i$
$x+iy-ix+y-3ix-3y=1+4i$
$(x-2y)+(y-4x)i=1+4i$

منه : $\begin{cases}x-2y=1\\-4x+y=4\end{cases}$

($\Delta_y=\begin{vmatrix}1&1\\-4&4\end{vmatrix}=4+4=8$ ، $\Delta_x=\begin{vmatrix}1&-2\\4&1\end{vmatrix}=1+8=9$ ، $\Delta=\begin{vmatrix}1&-2\\-4&1\end{vmatrix}=1-8=-7$)

منه : $\begin{cases}x=\frac{-9}{7}\\y=\frac{-8}{7}\end{cases}$ منه : $z=\frac{-9}{7}-\frac{8}{7}i$ بالتالي : $S=\left\{\frac{-9}{7}-\frac{8}{7}i\right\}$

بوضع $z=x+iy$ ، $(x,y)\in IR^2$ نجد :

$z\bar{z}+3(z-\bar{z})=13+18i$
$x^2+y^2+3(2iy)=13+18i$

منه : $\begin{cases}x^2+y^2=13\\6y=18\end{cases}$ منه : $\begin{cases}y=3\\x^2=4\end{cases}$

منه : $\begin{cases}y=3\\x=2\end{cases}$ أو $\begin{cases}y=3\\x=-2\end{cases}$ بالتالي : $S=\{2+3i\ ;\ -2+3i\}$

لدينا $(z+2\bar{z}+i)(z+2\bar{z}-i)=0 \Leftrightarrow (z+2\bar{z})^2-i^2=0 \Leftrightarrow (z+2\bar{z})^2+1=0$ منه : $z+2\bar{z}+i=0$ أو $z+2\bar{z}-i=0$

الآن بوضع : $z=x+iy$ $(x,y)\in IR^2$ نجد: $x+yi+2x-2iy+i=0$ أو $x+yi+2x-2iy-i=0$

منه : $3x-yi=-i$ أو $3x-yi=i$ منه: $\begin{cases}3x=0\\-y=-1\end{cases}$ أو $\begin{cases}3x=0\\-y=1\end{cases}$ بالتالي : $S=\{i\,;-i\}$

<u>تمرين 3</u> : نعتبر العدد العقدي $j=\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

1

$$j^2+j+1=\left(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+1=\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{3}{4}+\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+1=\frac{-2}{4}+\frac{-1}{2}+1=0$$

لنستنتج أن: $j^3=1$

طريقة 1	طريقة 2
بما أن $j^2=-j-1$ ، فإن: $j^3=j\,j^2=j(-j-1)$ $j^3=-j^2-j=-(-j-1)-j=j+1-j=1$	بما أن : $j^3-1=(j-1)(j^2+j+1)=0$ فإن: $j^3=1$

2 بما أن $j\neq 1$ فإن:

$$S=1+j+j^2+j^3+\ldots+j^{2014}$$

$$S=1\times\frac{1-j^{2015}}{1-j}=\frac{1-j^{2013}\times j^2}{1-j}=\frac{1-\left(j^3\right)^{671}\times j^2}{1-j}=\frac{1-j^2}{1-j}=\frac{(1-j)(1+j)}{1-j}=1+j=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$.

<u>تمرين 4</u> : ليكن $z\neq\frac{-i}{2}$ حيث $|z|=1$ نضع : $u=\frac{z+2i}{2z+i}$.

بما أن $|z|=1$ فإن : $z\bar{z}=1$ منه : $\bar{z}=\frac{1}{z}$

لدينا :
$$u.\bar{u}=\left(\frac{z+2i}{2z+i}\right)\left(\frac{\bar{z}-2i}{2\bar{z}-i}\right)=\left(\frac{z+2i}{2z+i}\right)\left(\frac{\frac{1}{z}-2i}{2\frac{1}{z}-i}\right)=\left(\frac{z+2i}{2z+i}\right)\left(\frac{1-2zi}{2-zi}\right)=\frac{z-2z^2i+2i+4z}{4z-2z^2i+2i+z}=1$$

بالتالي : $|u|^2=1$ أي : $|u|=1$

<u>تمرين 5</u> : ليكن a و b عددين عقديين حيث $a\neq b$ و $|a|=|b|=1$.

لدينا $|a|=|b|=1$ منه: $\bar{a}=\frac{1}{a}$ منه $\bar{b}=\frac{1}{b}$

الآن :
$$\overline{\left(\frac{z+ab\bar{z}-(a+b)}{a-b}\right)}=\frac{\bar{z}+\bar{a}\bar{b}z-(\bar{a}+\bar{b})}{\bar{a}-\bar{b}}=\frac{\bar{z}+\frac{1}{ab}z-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}=\frac{ab\bar{z}+z-(b+a)}{b-a}=-\left(\frac{z+ab\bar{z}-(a+b)}{a-b}\right)$$

بالتالي : $\frac{z+ab\bar{z}-(a+b)}{a-b}\in i\,IR$

لاحظ التكافؤ الهام: $\bar{a}=\frac{1}{a}\Leftrightarrow |a|=1$ و $\bar{Z}=-Z\Leftrightarrow Z\in i\,IR$

<u>تمرين 6</u> : a و b و c أعداد عقدية مختلفة مثنى مثنى.

1 لدينا :

$$|a-b|^2+|a-c|^2=|b-c|^2\Leftrightarrow (a-b)\overline{(a-b)}+(a-c)\overline{(a-c)}=(b-c)\overline{(b-c)}$$
$$|a-b|^2+|a-c|^2=|b-c|^2\Leftrightarrow (a-b)(\bar{a}-\bar{b})+(a-c)(\bar{a}-\bar{c})=(b-c)(\bar{b}-\bar{c})$$
$$|a-b|^2+|a-c|^2=|b-c|^2\Leftrightarrow a\bar{a}-a\bar{b}-b\bar{a}+b\bar{b}+a\bar{a}-a\bar{c}-c\bar{a}+c\bar{c}=b\bar{b}-b\bar{c}-c\bar{b}+c\bar{c}$$
$$|a-b|^2+|a-c|^2=|b-c|^2\Leftrightarrow 2a\bar{a}+b\bar{c}+c\bar{b}=a\bar{b}+b\bar{a}+a\bar{c}+c\bar{a}$$

و

و من جهة أخرى :

$$\frac{b-a}{c-a}\in i\,IR \Leftrightarrow \frac{\bar b-\bar a}{\bar c-\bar a}=\frac{a-b}{c-a} \Leftrightarrow \bar b c-\bar b a-\bar a c+\bar a a=a\bar c-a\bar a-b\bar c+b\bar a$$

$$\frac{b-a}{c-a}\in i\,IR \Leftrightarrow 2a\bar a+b\bar c+c\bar b=a\bar b+b\bar a+a\bar c+c\bar a$$

بالتالي : $\frac{b-a}{c-a}\in i\,IR \Leftrightarrow |a-b|^2+|a-c|^2=|b-c|^2$

2 باعتبار النقط في معلم م.م.م $A(a)$ و $B(b)$ و $C(c)$ ، فالعبارة المحصل عليها تعني :

$$AB^2+AC^2=BC^2 \Leftrightarrow (AB)\perp(AC)$$

وهي تعبر عن مبرهنتي فيثاغورس المباشرة و العكسية.

تمرين 7 : المستوى العقدي منسوب إلى م.م.م $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$. حدد طبيعة المجموعات التالية.

$E=\{M(z)\,/\ 5z+3\bar z+2-i\in IR\}$ ، نضع : $z=x+iy\,/\ (x,y)\in IR^2$

$$M\in E \Leftrightarrow 5x+5iy+3x-3iy+2-i\in IR \Leftrightarrow 8x+2+2iy-i\in IR \Leftrightarrow 2y-1=0 \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}$$

بالتالي E هي المستقيم ذو المعادلة : $(E):\ y=\frac{1}{2}$

$F=\{M(z)\,/\ |z-2i+1|=|z+i-3|\}$

نعتبر النقطتين $A(3-i)$ و $B(-1+2i)$ ، $M\in F \Leftrightarrow |z-(-1+2i)|=|z-(3-i)| \Leftrightarrow BM=AM$

إذن : F هو المستقيم واسط القطعة $[AB]$

أحينا الحل الهندسي يكون جد بسيط مقارنة بالحل الجبري، خصوصا أنه طلب منا فقط تحديد طبيعة المجموعة (دائرة،مستقيم.....)

$K=\{M(z)\,/\ (z+3i-1)(\bar z+2)\in i\,IR\}$

لدينا :

$$M\in K \Leftrightarrow \overline{(z+3i-1)(\bar z+2)}=-(z+3i-1)(\bar z+2) \Leftrightarrow (\bar z-3i-1)(z+2)+(z+3i-1)(\bar z+2)=0$$

$$M\in K \Leftrightarrow z\bar z+2\bar z-3iz-6i-z-2+z\bar z+2z+3i\bar z+6i-\bar z-2=0$$

$$M\in K \Leftrightarrow 2z\bar z+\bar z+3i\bar z-3iz+z-4=0$$

الآن بوضع $z=x+iy\,/\ (x,y)\in IR^2$ نجد:

$$M\in K \Leftrightarrow 2x^2+2y^2+x-iy+3i(x-iy)-3i(x+iy)+x+iy-4=0$$

$$M\in K \Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2x+3xi+3y-3xi+3y-4=0$$

$$M\in K \Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2x+6y-4=0$$

$$M\in K \Leftrightarrow x^2+y^2+x+3y-2=0$$

$$M\in K \Leftrightarrow x^2+x+\frac{1}{4}+y^2+3y+\frac{9}{4}=2+\frac{1}{4}+\frac{9}{4}$$

$$M\in K \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{18}{4}$$

إذن K هي الدائرة ذات المركز $\Omega\left(\frac{-1}{2};\frac{-3}{2}\right)$ و الشعاع $r=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

لاحظ أنه من الأفضل أن نبدأ بتبسيط تعبير المجموعة إلى أن نصل مرحلة ينتهي التبسيط، إذاك نضع $z=x+iy$ ، فليس من المفيد دائما استعمال هذا الوضع من البداية كما هو الشأن في المجموعة الأولى.

في هذا المثال يمكن الوضع من البداية و ربما لن يكون هناك اختلاف كبير في الحسابات، لكن في أمثلة أخرى يكون الفرق واضحا .

$H=\left\{M(z)\,/\ \frac{z+2}{z}\in i\,IR\right\}$ ، لدينا :

$$M\in H \Leftrightarrow \overline{\left(\frac{z+2}{z}\right)}=-\frac{z+2}{z} \Leftrightarrow \frac{\bar z+2}{\bar z}+\frac{z+2}{z}=0 \Leftrightarrow \frac{z\bar z+2z+z\bar z+2\bar z}{z\bar z}=0 \Leftrightarrow 2z\bar z+2z+2\bar z=0 \Leftrightarrow z\bar z+z+\bar z=0$$

الآن بوضع $z=x+iy\,/\,(x,y)\in IR^2$ نجد: $M\in H \Leftrightarrow x^2+y^2+2x=0 \Leftrightarrow x^2+2x+1+y^2=1 \Leftrightarrow (x+1)^2+y^2=1$

إذن H هي الدائرة ذات المركز $\Omega(-1;0)$ و الشعاع $r=1$

لدينا : $V=\left\{M(z)\,/\,\frac{\bar{z}+2}{z+2}\in IR\right\}$ ،

$$M\in V \Leftrightarrow \overline{\left(\frac{\bar{z}+2}{z+2}\right)}=\frac{\bar{z}+2}{z+2} \Leftrightarrow \frac{z+2}{\bar{z}+2}=\frac{\bar{z}+2}{z+2} \Leftrightarrow (z+2)^2=(\bar{z}+2)^2 \Leftrightarrow (z+2)^2-(\bar{z}+2)^2=0 \Leftrightarrow (z+\bar{z}+4)(z-\bar{z})=0$$

الآن بوضع $z=x+iy\,/\,(x,y)\in IR^2$ نجد: $M\in V \Leftrightarrow (2x+4)(2iy)=0 \Leftrightarrow x=-2 \text{ ou } y=0$

إذن V هي اتحاد المستقيمين : $(D_1): x=-2$ و $(D_2): y=0$

الأمثلة أعلاه مختارة بعناية بغية التعريف فمختلف طرق تحديد مثل هذه المجموعات.