

## الحركات المستوية

الدرس الثاني  
عشر

## Mouvements plans

## I. حركة قذيفة في مجال الثقالة المنتظم.

## 1. تعريف:

نسمي **قذيفة** كل جسم يرسل على مقربة من الأرض بسرعة بدئية  $\vec{V}_0$  ، لتبسيط الدراسة نُهمل جميع الاحتكاكات ونعتبر القذيفة خاضعة لوزنها  $\vec{P}$  فقط (سقوط حر).

## 2. دراسة حركة قذيفة في مجال الثقالة المنتظم:

نرسل من نقطة O قذيفة (كرية) كتلتها m بسرعة بدئية  $\vec{V}_0$  ، وندرس حركتها في مجال الثقالة الذي نعتبره منتظما  $g = cte$  .

تتم هذه الدراسة في مرجع أرضي نعتبره غاليليا حيث نمعلم مواضع G في كل لحظة بإحداثياتها في معلم متعامد ممنظم  $R(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  مرتبط بالمرجع الأرضي.

تكون متجهة السرعة البدئية  $\vec{V}_0$  زاوية  $\alpha$  مع الخط الأفقي تسمى **زاوية القذف**. كما نختار لحظة إطلاق القذيفة أصلا للتواريخ.

## أ. متجهة التسارع (المعادلات التفاضلية):

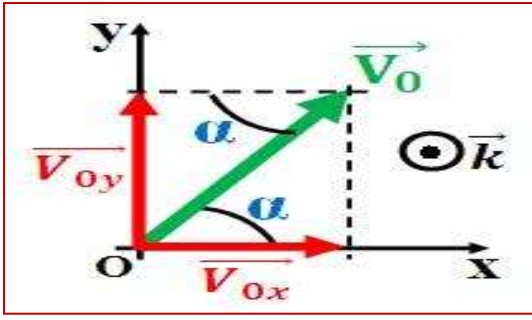
المجموعة المدروسة {الجسم (S)}. جرد القوى:  $\vec{P}$  الوزن.

و حسب القانون الثاني لنيوتن لدينا:  $\vec{P} = m\vec{a}_G$  أي  $m\vec{g} = m\vec{a}_G$  ومنه  $\vec{a}_G = \vec{g}$  (1)

$$\vec{a}_G \begin{cases} a_x = 0 = \frac{dV_x}{dt} \\ a_y = -g = \frac{dV_y}{dt} \\ a_z = 0 = \frac{dV_z}{dt} \end{cases} \text{ بإسقاط العلاقة (1) على معلم الفضاء } R(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}) \text{ نجد:}$$

## ب. متجهة السرعة:

$$\vec{V}_G \begin{cases} V_x = V_{0x} \\ V_y = -g \cdot t + V_{0y} \\ V_z = V_{0z} \end{cases} \text{ عن طريق التكامل نحدد إحداثيات متجهة السرعة وهي:} \begin{cases} \frac{dV_x}{dt} = 0 \\ \frac{dV_y}{dt} = -g \\ \frac{dV_z}{dt} = 0 \end{cases} \text{ لدينا:}$$



حيث كل من  $V_{0x}$  و  $V_{0y}$  و  $V_{0z}$  تمثل إحداثيات متجهة السرعة البدئية في المعلم  $R(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  و منه نجد:

$$V_{0x} = V_0 \cdot \cos \alpha$$

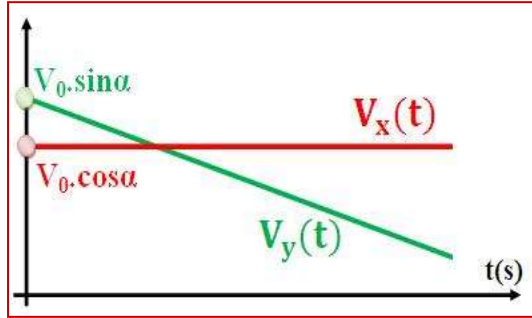
$$V_{0y} = V_0 \cdot \sin \alpha \text{ و}$$

$$V_{0z} = 0 \text{ و}$$

و بالتالي إحداثيات متجهة السرعة لمركز قصور القذيفة في المعلم

$$\vec{V}_G \begin{cases} V_x(t) = V_0 \cdot \cos \alpha \\ V_y(t) = -g \cdot t + V_0 \cdot \sin \alpha \\ V_z(t) = 0 \end{cases} \text{ هي } R(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$$

نمثل كل من  $V_x(t)$  و  $V_y(t)$  و  $V_z(t)$  بدلالة الزمن فنحصل على المنحنى جانبه:



### ج. متجهة الموضع:

عن طريق التكامل نحدد إحداثيات متجهة الموضع وهي كالتالي:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = V_0 \cdot \cos \alpha \\ \frac{dy}{dt} = -g \cdot t + V_0 \cdot \sin \alpha \\ \frac{dz}{dt} = 0 \end{cases} \text{ لدينا:}$$

$$\begin{cases} x(t) = (V_0 \cdot \cos \alpha) \cdot t + x_0 \\ y(t) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + (V_0 \cdot \sin \alpha) \cdot t + y_0 \\ z(t) = z_0 \end{cases}$$

الموضع عند اللحظة  $t=0$  في المعلم و منه نجد المعادلات الزمنية لحركة الجسم (S):

$$\begin{cases} x(t) = (V_0 \cdot \cos \alpha) \cdot t \\ y(t) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + (V_0 \cdot \sin \alpha) \cdot t \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

### ملاحظات:

- بما أن  $z(t) = 0$  فإن الحركة تتم في المستوى  $(xOy)$  أي في المستوى الرأسي الذي يشمل متجهة السرعة البدئية و بالتالي فإن حركة القذيفة **حركة مستوية**.
- على المحور الأفقي  $(Ox)$  حركة  $G$  **حركة مستقيمة منتظمة**، حيث  $x(t)$  خطية والسرعة  $V_x(t)$  ثابتة.
- على المحور الرأسي  $(Oy)$  حركة  $G$  **حركة مستقيمة متغيرة بانتظام**، حيث  $y(t)$  دالة من الدرجة الثانية والتسارع  $a_y$  ثابت.

### 3. مميزات المسار:

#### أ. معادلة المسار:

معادلة المسار هي العلاقة التي تجمع بين إحداثيتي النقطة  $G$  للمتحرك، و بما أن الحركة تتم في المستوى  $(xOy)$  إذن يفترض إيجاد تعبير  $y(t)$  بدلالة  $x(t)$  للحصول على معادلة المسار، و ذلك بإقصاء الزمن بين المعادلتين الزميتين

$x(t)$  و  $y(t)$ ، بحيث لدينا:  $x(t) = (V_0 \cdot \cos\alpha) \cdot t$  أي أن  $t = x / (V_0 \cdot \cos\alpha)$  حيث نعوض  $t$  بتعبيرها في المعادلة الزمنية  $y(t)$  فنجد:

$$y(x) = -\frac{1}{2} g \left( \frac{x}{V_0 \cos\alpha} \right)^2 + (V_0 \sin\alpha) \cdot \left( \frac{x}{V_0 \cos\alpha} \right)$$

و منه نحصل على معادلة المسار التالية:  $y(x) = -\frac{g}{2 \cdot V_0^2 \cdot \cos^2\alpha} x^2 + (\tan\alpha) \cdot x$

$y(x)$  دالة من الدرجة الثانية أي أن تمثيلها عبارة عن شلجم يوجد في مستوى القذف و منه فإن **الحركة شلجمية**.

### ب. المدى الرأسى (قمة المسار F):

نسمي **قمة المسار** الارتفاع القصوي الذي تصل إليه القذيفة بالنسبة لارتفاعها البدئي و الذي يطابق النقطة F في المسار.

عند قمة المسار تنعدم السرعة  $V_y(t_F) = 0$  أي أن:  $V_y(t_F) = -g \cdot t_F + V_0 \cdot \sin\alpha = 0$

إذن نستنتج تاريخ مرور القذيفة من النقطة F بحيث:  $t_F = \frac{V_0 \cdot \sin\alpha}{g}$

نعوض  $t_F$  بتعبيرها في كل من  $x(t)$  و  $y(t)$  للحصول على إحداثيتي النقطة F (قمة المسار):

◆ لدينا:  $x(t_F) = (V_0 \cdot \cos\alpha) \cdot t_F = (V_0 \cdot \cos\alpha) \cdot \frac{V_0 \cdot \sin\alpha}{g}$  ومنه:  $X_F = \frac{V_0^2 \cdot \sin(2\alpha)}{2g}$

◆ لدينا:  $y(t_F) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot \left( \frac{V_0 \cdot \sin\alpha}{g} \right)^2 + (V_0 \cdot \sin\alpha) \cdot \frac{V_0 \cdot \sin\alpha}{g}$  ومنه:  $Y_F = \frac{V_0^2 \cdot \sin^2(\alpha)}{2g}$

### ● ملاحظة:

■ نحصل على أقصى قيمة لقمة المسار إذا كان  $y_F$  قصوي أي أن:  $\sin^2\alpha=1 \Leftrightarrow \sin\alpha=1$  و منه:  $\alpha = \pi/2$  أي في حالة إرسال القذيفة رأسياً نحو الأعلى.

### ج. المدى الأفقى (المدى OP):

نسمي **المدى** المسافة بين الموضع البدئي للقذيفة لحظة انطلاقها (غالبا النقطة O) و الموضع P أثناء سقوط القذيفة بحيث تنتمي P إلى المحور الأفقى الذي يشمل الموضع البدئي.

عند النقطة P تنعدم  $y_P$  أي أن  $y(x_P) = 0$  أي أن:  $y(x_P) = -\frac{g}{2 \cdot V_0^2 \cdot \cos^2\alpha} x_P^2 + (\tan\alpha) \cdot x_P = 0$

أي:  $x_P \left( -\frac{g}{2 \cdot V_0^2 \cdot \cos^2\alpha} x_P + \tan\alpha \right) = 0$  أي أن للمعادلة حلين هما:

◆ الحل الأول:  $x_P = 0$  حالة السقوط الرأسى الحر.

◆ الحل الثاني:  $-\frac{g}{2 \cdot V_0^2 \cdot \cos^2\alpha} x_P + \tan\alpha = 0$  أي أن:  $x_P = \frac{V_0^2 \cdot \sin(2\alpha)}{g}$  حالة القذيفة.

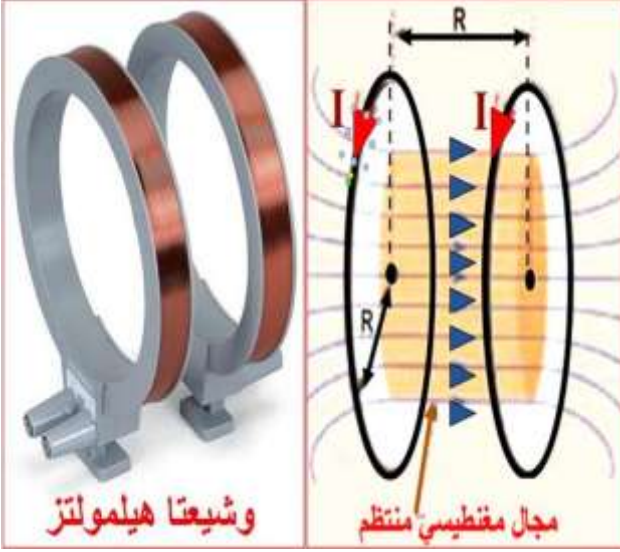
### ● ملاحظة:

■ نحصل على أقصى قيمة للمدى إذا كان  $x_P$  قصوي أي أن:  $\sin 2\alpha=1 \Leftrightarrow 2\alpha = \pi/2$  و منه:  $\alpha = \pi/4$  أي أن

$$x_P = \frac{V_0^2}{g}$$

## II. حركة دقيقة مشحونة في مجال مغناطيسي منتظم.

### 1. المجال المغناطيسي المنتظم:



يكون **المجال المغناطيسي منتظما** إذا كان لمتجهة المجال المغناطيسي  $\vec{B}$  نفس المميزات في نقط مختلفة من الفضاء.

للحصول على مجال مغناطيسي منتظم نستعمل وشيعة وشيعة يمر فيهما تيارا كهربائيا، حيث تتغير شدة المجال المغناطيسي بتغير شدة التيار الكهربائي المار في الوشيعة. تسمى هاتين الوشيعة بـ "**وشيعة هيلمولتز**".

بالنسبة لمستوى الورقة نرسم لمتجهة المجال المغناطيسي  $\vec{B}$  في كل حالة من الحالات التالية كما يلي:

- ◆ إذا كانت  $\vec{B}$  داخلة إلى الورقة نكتب  $(\vec{B} \otimes)$ .
- ◆ إذا كانت  $\vec{B}$  خارجة من الورقة نكتب  $(\vec{B} \odot)$ .

### 2. القوة المغناطيسية (قوة لورنتز):

#### أ. تعريف:

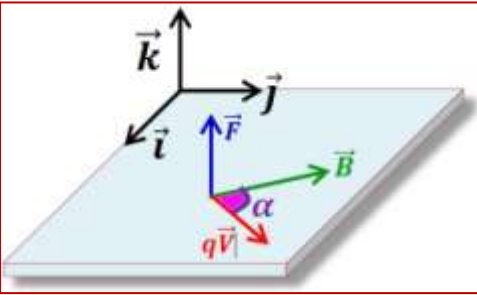
$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

تخضع دقيقة مشحونة شحنتها  $q$ ، و تتحرك بسرعة متجهتها  $\vec{v}$  داخل مجال مغناطيسي منتظم متجهته  $\vec{B}$ ، إلى قوة مغناطيسية  $\vec{F}$  تسمى **قوة لورنتز**، تحدها العلاقة المتجهية جانبه.

حيث يمثل  $q\vec{v} \wedge \vec{B}$  الجداء المتجهي للمتجهين  $q\vec{v}$  و  $\vec{B}$ . كما أن معرفة مميزات المتجهين  $q\vec{v}$  و  $\vec{B}$  يمكننا من استنتاج مميزات القوة  $\vec{F}$ .

#### ب. مميزات قوة لورنتز:

- ◆ **نقطة التأثير:** هي الدقيقة المشحونة نفسها باعتبارها نقطية.
- ◆ **خط التأثير:** المستقيم العمودي على المستوى  $(\vec{v}; \vec{B})$ ، حيث تكون  $\vec{F}$  عمودية على  $\vec{v}$  و  $\vec{B}$ .
- ◆ **المنحى:** هو المنحى بحيث يكون ثلاثي الأوجه  $(q\vec{v}; \vec{B}; \vec{F})$ ، مباشرا، و يحدد كذلك بطريقة اليد اليمنى.
- ◆ **الشدة:** تعرف بالعلاقة التالية:  $F = |q| \cdot v \cdot B \cdot |\sin(\alpha)|$



#### حيث:

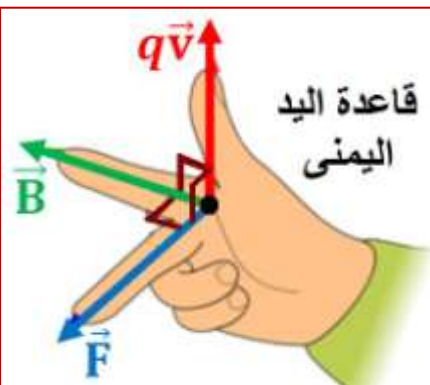
$q$ : شحنة الدقيقة بالكولوم (C) -  $v$ : سرعتها بـ (m/s) -  $B$ : شدة المجال المغناطيسي بالتسلا (T) -  $F$ : شدة قوة لورنتز بالنيوتن (N) -  $\alpha$ : الزاوية التي تكونها  $\vec{v}$  و  $\vec{B}$ .

#### ملاحظات:

■ إذا كانت  $v$  منعدمة ( $v=0$ ) فإن  $F$  تكون منعدمة رغم وجود المجال المغناطيسي. ومنه نستنتج أن المجال المغناطيسي لا يؤثر على دقيقة مشحونة توجد في حالة سكون.

#### ج. تحديد منحى قوة لورنتز:

يمكن تحديد منحى قوة لورنتز باستعمال قاعدة الأصابع الثلاثة لليد اليمنى بحيث يمثل: الإبهام (منحى  $q\vec{v}$ ) - السبابة (منحى  $\vec{B}$ ) - الوسطى (منحى  $\vec{F}$ ).



## مثال:

باستعمال قاعدة اليد اليمنى حدد منحنى قوة لورنتز في كل حالة من الحالات التالية:

توجيه: إذا كانت  $q > 0$  فإن  $q\vec{v}$  نفس منحنى  $\vec{v}$ ، وإذا كانت  $q < 0$  فإن  $q\vec{v}$  منحنى معاكس لمنحنى  $\vec{v}$ .

$q > 0$	$q > 0$	$q < 0$	$q < 0$

### 3. الطاقة الحركية لدقيقة مشحونة في مجال مغناطيسي منتظم:

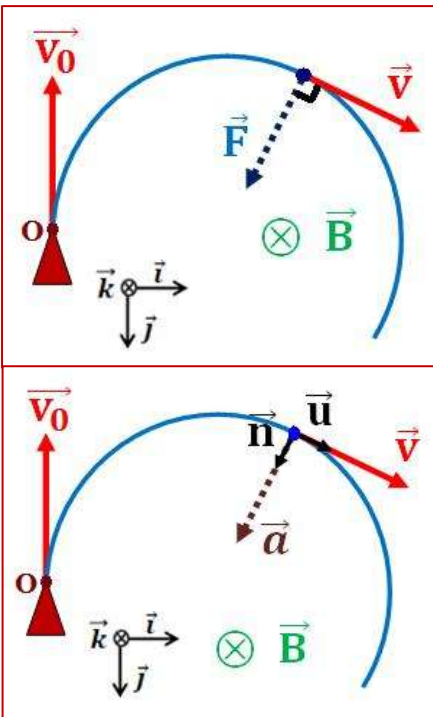
تخضع الدقيقة المشحونة أثناء حركتها في مجال مغناطيسي منتظم إلى قوة لورنتز التي تبقى دائما عمودية على متجهة السرعة أي أن  $\vec{F} \perp \vec{v}$  ومنه يمكن أن نستنتج أن الجداء السلمي  $\vec{F} \cdot \vec{v}$  منعدم أي  $(\vec{F} \cdot \vec{v} = 0)$ . وبالتالي فإن **لقوة لورنتز قدرة منعدمة أي  $P = \vec{F} \cdot \vec{v} = 0$**

إذا كانت دقيقة مشحونة تخضع لقوة لورنتز فقط (نهمل وزنها)، فإن قدرة هذه القوة منعدمة أي  $P = \frac{dE_c}{dt} = 0$  أي أن طاقتها الحركية ثابتة  $E_c = cte$  ومنه يمكن أن نستنتج أن سرعتها ثابتة  $v = v_0 = cte$ .

ومنه نخلص إلى أن **حركة دقيقة داخل مجال مغناطيسي منتظم تكون منتظمة و أن طاقتها الحركية تحفظ.**

### 4. دراسة حركة دقيقة مشحونة في مجال مغناطيسي منتظم:

نعتبر دقيقة ذات شحنة  $q < 0$  في حركة داخل مجال مغناطيسي منتظم ثابت حيث متجهة سرعتها  $\vec{v}$  عمودية على  $\vec{B}$  متجهة المجال المغناطيسي.



#### أ. تعبير التسارع:

- المجموعة المدروسة {الدقيقة المشحونة} - جرد القوى:  $\vec{F}$  قوة لورنتز.  
- حسب القانون الثاني لنيوتن لدينا:  $\vec{F} = m\vec{a}_G$  أي  $q\vec{v} \wedge \vec{B} = m\vec{a}_G$

$$\vec{a}_G = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{q\vec{v} \wedge \vec{B}}{m} \text{ ومنه:}$$

ومنه نخلص إلى أن **متجهة التسارع  $\vec{a}_G$  عمودية على كل من  $\vec{v}$  و  $\vec{B}$ .**

#### ب. تعبير التسارع في أساس فريني:

نعلم أن التسارع في أساس فريني يكتب كما يلي:  $\vec{a}_G = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{u} + \frac{v^2}{\rho} \cdot \vec{n}$

و مما سبق توصلنا إلى أن سرعة الدقيقة ثابتة أي  $v = v_0 = cte$  أي أن  $\frac{dv}{dt} = 0$

$$\vec{a}_G = \frac{v^2}{\rho} \cdot \vec{n} = \frac{q\vec{v} \wedge \vec{B}}{m} \text{ أي أن } \vec{a}_G = \frac{v^2}{\rho} \cdot \vec{n} \text{ ومنه فإن}$$

ونعلم أن:  $F = |q| \cdot v \cdot B \cdot |\sin(\alpha)|$  وبما أن  $\vec{F} \perp \vec{v}$  فإن  $\alpha=90^\circ$  أي  $\sin\alpha=1$  ومنه  $F = |q| \cdot v \cdot B$

$$\rho = \frac{m \cdot v}{|q| \cdot B} \text{ وبالتالي نجد أن: } \frac{v^2}{\rho} = \frac{|q| \cdot v \cdot B}{m}$$

نلاحظ أن شعاع إنحناء المسار ثابت، ومنه يمكن أن نخلص إلى أن مسار الدقيقة مسار دائري شعاعه  $r = \frac{m \cdot v}{|q| \cdot B}$

### ج. دور الحركة:

دور الحركة T هو المدة الزمنية اللازمة لتتجزد الدقيقة دورة كاملة، ويعرف بالعلاقة التالية:  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi \cdot r}{v}$

$$T = \frac{2\pi \cdot m}{|q| \cdot B} \text{ وبتعويض } r \text{ بتعبيرها نجد أن:}$$

### 5. الانحراف المغنطيسي:

تدخل حزمة تتكون من نفس الدقائق، كتلة الدقيقة الواحدة هي m وشحنتها q، من O في حيز من الفضاء عرضه l يسود فيه مجال مغنطيسي منتظم متجهته  $\vec{B}$ . سرعة كل دقيقة عند O هي  $v_0$  متجهتها  $\vec{v}_0$  عمودية على  $\vec{B}$ .

مسار الدقائق داخل المجال المغنطيسي مسار دائري شعاعه  $r = \frac{m \cdot v}{|q| \cdot B}$

تغادر هذه الدقائق المجال المغنطيسي في النقطة S. فتأخذ حركة مستقيمة منتظمة (نهمل وزن الدقيقة)، مسارها يجسده المماس للمسار الدائري في S لتصطدم بشاشة تبعد عن النقطة O بالمسافة L عند النقطة A'.

في غياب المجال المغنطيسي تصطدم الدقائق بالشاشة في النقطة A، حيث يمثل المقدار  $D_m = AA'$  الانحراف المغنطيسي، ويشكل المقدار  $\alpha$  الانحراف الزاوي. (أنظر الشكل)

باعتبار  $\alpha$  صغيرة جدا، فإن:

$$\sin \alpha \approx \tan \alpha \text{ أي أن:}$$

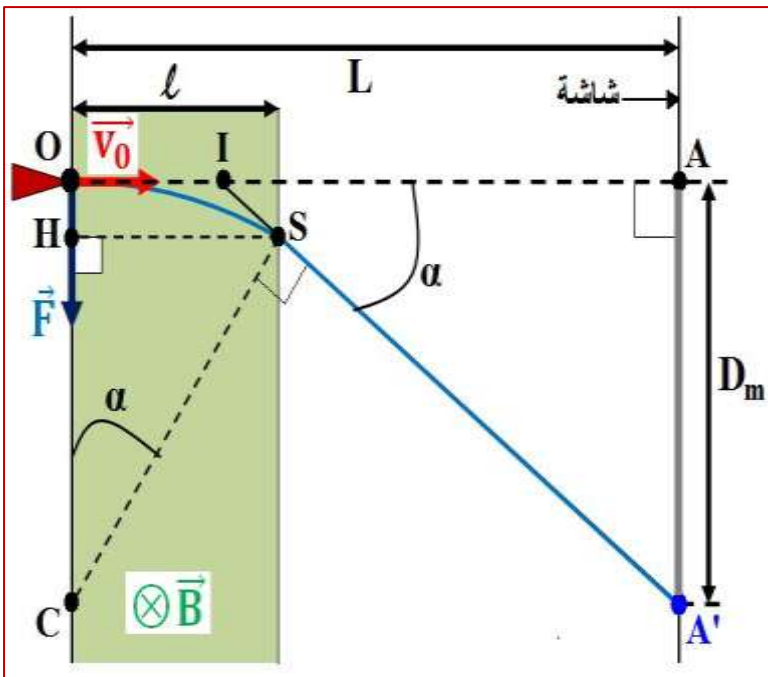
$$\tan \alpha = AA' / (L - OI) \text{ و بما أن } \ell \ll L \text{ فإن } \tan \alpha \approx \alpha = D_m / L$$

$$\sin \alpha = l / r \text{ و بما أن } \alpha \approx \tan \alpha \approx \sin \alpha \text{ فإننا نستنتج أن: } \frac{D_m}{L} = \frac{l}{r} \text{ ومنه الانحراف}$$

$$D_m = \frac{l \cdot L}{r} \text{ المغنطيسي:}$$

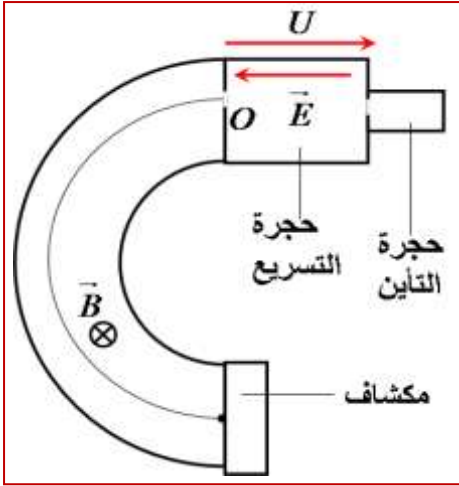
وبتعويض r بقيمتها نحصل على تعبير الانحراف المغنطيسي، بحيث:

$$D_m = \frac{l \cdot L \cdot |q|}{m \cdot v_0} \cdot B$$



### III. تطبيقات

#### 1. راسم الطيف للكتلة: (spectromètre)



راسم الطيف للكتلة جهاز يمكن من فرز أيونات ذات كتل أو شحن مختلفة و ذلك باستعمال مجال كهرساكن ومجال مغنطيسي يتكون راسم الطيف للكتلة من نوع دمبستير من:

- ◆ حجر التاين حيث تنتج الأيونات.
- ◆ حجر التسريع حيث تدخل الأيونات بسرعة تكاد تكون منعدمة لتسرع بواسطة مجال كهرساكن  $\vec{E}$  محدث بواسطة توتر  $U$ ، تخرج الأيونات من حجر التسريع عند النقطة  $O$  بالسرعة  $\vec{v}_0$  حيث تخضع لتأثير مجال مغنطيسي منتظم  $\vec{B}$  فتحدث وفق مسار يشكّل قوساً من دائرة شعاعها:  $r = \frac{m \cdot v_0}{|q| \cdot B}$ .

- ◆ مكشاف حيث يُجمَع الدقائق و قد تكون صفيحة فوتوغرافية أو عداد (كعداد جيجر ميلر) بالنسبة لقيمتي  $B$  و  $U$  ثابتتين تتميز الأيونات بنفس خارج القسمة  $\frac{|q|}{m}$  فيكون لها نفس المسار الدائري ذي الشعاع  $r$  وبمعرفة قيمة  $r$  يتم تعيين المقدار  $\frac{|q|}{m}$  وبالمقابل فإن الأيونات التي لها نفس الشحنة و ليس لها نفس الكتلة ، تكون مساراتها مختلفة بحيث يتناسب شعاع كل مسار مع  $\sqrt{m}$  و بذلك يصير من الممكن فرزها.

#### 2. السيكلوترون:

السيكلوترون جهاز مُسرّع للدقائق يتكون من علبتين نصف أسطوانيتين مفرغتين و موضوعتين أفقياً في مجال مغنطيسي منتظم متجهته  $\vec{B}$ .

يطبق بين هاتين العلبتين توتر متناوب  $U$  يساوي دوره  $T$  مدة دوران الدقيقة طول مساره الدائري، في اللحظة التي يكون فيها المجال الكهربائي أقصى، يبعث المنبع أيونات فتسرع نحو العلبة  $(D_1)$  حيث تنجز نصف دورة حسب مسارها الدائري خلال مدة زمنية تساوي  $T/2$  ولحظة خروجها من العلبة  $(D_1)$  يصير المجال الكهرساكن أقصى، فيتم تسريعها من جديد نحو العلبة  $(D)$  لتنجز داخلها حركة وفق مسار نصف دائري ذي شعاع أكبر وهكذا و بعد كل عبور من علبة إلى أخرى يتزايد شعاع مسار الدقائق الدائري و سرعتها فتتزايد طاقتها الحركية.

