الثانية علوم الرياضية	الشعبة:	الامتحان التجريبي 1 2013	أكاديمية البيضاء الكبرى نيابة عين السبع الحي المحمدي
الرياضيات	المادة		
4ساعات	مدة الانجاز		
1	الصفحة		

التمرين 1 :

لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع $g_n(x) = 1 + x - e^{-nx}$

I) 1) أعط جدول تغيرات g_n على $\mathbb{R}$ — 0,50

2) أدرس الفروع اللانهائية لـ $\mathcal{C}_{g_n}$ — 0,50

3) أنشئ $\mathcal{C}_{g_1}$ (لاحظ أن $g_n(0) = 0$) — 0,50

4) أ) بين أن: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \exists! \, x_n > 0 \, / \, g_n(x_n) = 1$ — 0,50

ب) بين أن $(x_n)_n$ تناقصية واستنتج أنها متقاربة — 0,75

ج) أحسب: $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$ — 0,75

II) نعتبر المتتالية $(y_n)_{n \geq 1}$ المعرفة كمايلي: $y_1 = 1$ و $y_{n+1} = e^{-y_n}$

1- بين أن x_1 هو الحل الوحيد لـ $e^{-x} = x$ وأن $\frac{1}{e} \leq x_1 \leq 1$ — 0,50

2- بين أن $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{e} \leq y_n \leq 1$ — 0,50

3- بين أن: $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad |y_{n+1} - x_1| \leq e^{-\frac{1}{e}} |y_n - x_1|$ — 0,75

4- استنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n$ — 0,75

III) لتكن F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بمايلي: $F(0) = \frac{\ln 2}{2}$ و $\forall x>0, F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{g_1(t)} dt$

1- أ- بين أن $\forall t>0 \quad \frac{1}{1+t} \leq \frac{1}{g_1(t)} \leq \frac{1}{t}$ — 0,50

ب- استنتج: $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$ — 0,75

2- أ- بين أن $\forall t>0 \, , \quad 1-t \leq e^{-t} \leq 1-t+\frac{t^2}{2}$ — 0,75

ب- أدرس اتصال وقابلية إشتقاق F في 0 على اليمين — 1

3- بين أن F قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$ وأحسب $\forall x>0, F'(x)$ — 0,50

4- أعط جدول تغيرات F وأنشئ $\mathcal{C}_F$ — 1

التمرين 2 :

A) نعتبر المستوى P منسوبا إلى م.م.م $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ، A نقطة لحقها 2

f تطبيق من P نحو P بحيث لكل $M(z)$ و $M'(z')$

$$f(M) = M' \Leftrightarrow z' = \frac{3+i\sqrt{3}}{4}z + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$$

1- ماهي طبيعة f 0,50

2- أحسب AM' بدلالة AM وحدد قياس الزاوية $(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}})$ 1

3- بين أن المثلث AMM' قائم الزاوية في M' 0,75

4- لكل n من $\mathbb{N}^*$ نعتبر التطبيقات f_n من P نحو P بحيث

$f_1 = f$ و $f_{n+1} = f \circ f_n$. نضع $M_n = f_n(O)$ بحيث z_n لحق M_n

أ) حدد z_n بدلالة n . 1

ب) حدد قيم n من $\mathbb{N}^*$ التي من أجلها M_n ينتمي إلى المحور $(O, \vec{i})$ 1

B) 1- حل في $\mathbb{C}$ المعادلات التالية وأكتب حلولها على الشكل الأسي

أ- $z^7 = \bar{z}$ 1

ب- $(1-iz)^n = (1+iz)^n$ ، $n \in \mathbb{N}^*$ 1

C) 1- باستعمال الجذور النونية لـ 1 ، بين أن 1

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left(2 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right) = 2^n - 1$$

2- إستنتج أن : 1

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left(5 - 4\cos\frac{2k\pi}{n}\right) = (2^n - 1)^2$$

التمرين 3 :

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq 2}$ المعرفة ب : $u_n = \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!\,n^n}}$ 1,25

أحسب $\ln(u_n)$ واستنتج أن :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 4e^{-1}$$

الأجزاء A و B و C غير مرتبطة