ثانوية أتيلس — الامتحان التجريبي لمادة الرياضيات — السنة الدراسية: 11/12

2 ب ع رياضية أ و ب — المدة : 4 ساعات

عدد الصفحات : 3 — المعامل : 9

التمرين الأول : (3,25ن)

نعتبر في المستوى العقدي المنسوب إلى م م م م $(O;\vec{u};\vec{v})$ النقط A و B و C الحاقها على التوالي هي : $a=2$ و $b=-i$ و $c=1-i$.

1) أحسب $\frac{b-a}{c-a}$ ثم بين أن : $\left(\overline{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}}\right)\equiv \arctan 3\ [2\pi]$. — 0,75ن

2) لكل n من $\mathbb{N}^*$ نعتبر التحويل F_n الذي يحول كل نقطة $M(z)$ الى النقطة $M'(z')$ بحيث : $z'=(1+i)^n z$.

أ- حدد الشكل الأسي للعدد العقدي $(1+i)^n$ حيث $n\in\mathbb{N}^*$. — 0.5ن

ب- بين أن F_n هو مركب تبادلي لدوران R_n و تحاك H_n لهما نفس المركز O محددا عناصرهما — 0.75ن

3) لتكن $M_n(z_n)$ و لتكن $M_n'(z_n')$ صورتها بالتحويل F_n.

أ- حدد مجموعة قيم n من $\mathbb{N}^*$ التي من أجلها تكون النقط O و M_n و M_n' مستقيمية. — 0.5ن

ب- تحقق أن : $\frac{z_1'-z_1}{z_1}=i$ واستنتج طبيعة المثلث OM_1M_1'. — 0.5ن

4) لتكن (C) الدائرة التي مركزها B وشعاعها $\sqrt{2}$. — 0.25ن

حدد صورة الدائرة (C) بالتحويل F_1.

التمرين الثاني (3,25ن)

نذكرك أن $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي وأن $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية.

لكل a و b و c من $\mathbb{R}$ نضع : $M(a,b,c)=\begin{pmatrix} c & a & b\\ 0 & c & a\\ 0 & 0 & c\end{pmatrix}$.

ونعتبر المجموعة التالية : $G=\{M(a,b,c)\ /\ (a,b,c)\in\mathbb{R}^3\}$.

1) بين أن G جزء مستقر من $(M_3(\mathbb{R}),+)$ و $(M_3(\mathbb{R}),\times)$. — 0.5ن

2) أ- بين أن $(G,+,\times)$ حلقة واحدية و تبادلية. — 1ن

ب- هل $(G,+,\times)$ جسم ؟ — 0.25ن

3) نعرف في $\mathbb{R}^3$ قانون التركيب الداخلي $*$ التالي :

لكل (a,b,c) و (a',b',c') من $\mathbb{R}^3$: $(a,b,c)*(a',b',c')=(ac'+ca',aa'+bc',cc'+cb')$

أ- بين أن $(G,\times)$ و $(\mathbb{R}^3,*)$ متشاكلتان تقابليا — 0.75ن

ب- استنتج أن $(\mathbb{R}^3,+,*)$ حلقة واحدية — 0.75ن

الصفحة 3

التمرين الثالث (2,75 ن)

نضع $E=\{x\in\mathbb{N}\ /\ x\le 25\}$.

1) نعتبر التطبيق f المعرف من E نحو E والذي يربط كل عنصر x من E بالعدد $f(x)$ باقي القسمة الأقليدية للعدد $11x+8$ على 26.

أ- بين أن f تبايني. — 0.5ن

ب- بين أن المعادلة : $11x\equiv 1[26]$ تقبل حلا وحيدا x_0 في E يجب تحديده. — 0.5ن

ج- استنتج أن $\left(\forall(x,y)\in E^2\right) : y=f(x)\Rightarrow x\equiv 19y+4[26]$. — 0.5ن

2) نعتبر التطبيق g المعرف من E نحو E والذي يربط كل عنصر x من E بالعدد $g(x)$ باقي القسمة الأقليدية للعدد x^{13} على 26.

أ- بين أنه لكل x من E ، لدينا : $x^{13}\equiv x[13]$ و $x^{13}\equiv x[2]$ واستنتج أن g تبايني. — 0.75ن

ب- بين أن g تقابل من E نحو E وحدد تقابله العكسي g^{-1}. — 0.5ن

مسألة : (10,50ن)

الجزء الأول :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=\int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}dt$.

و ليكن (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ- أحسب $f(0)$. — 0.25ن

ب- بين أن $\left(\forall x\in\left]0;+\infty\right[\right) : \frac{\pi}{4}e^{-2x}\le f(x)\le\frac{\pi}{4}e^{-x}$ و استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. — 0,5ن

2) بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ وأن $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$ ثم اعط تاويلا هندسيا لذلك. — 0,75ن

3) أ- باستعمال مكاملة بالأجزاء ، بين أن : $(\forall u\in\mathbb{R}) : \int_0^u (u-t)e^t dt=e^u-1-u$. — 0,25ن

ب- بين أن : $(\forall u\in\mathbb{R}^+) : 0\le\int_0^u (u-t)e^t dt\le\frac{u^2}{2}e^u$. — 0,25ن

ج- استنتج أن : $(\forall u\in\mathbb{R}) : |e^u-1-u|\le\frac{u^2}{2}e^{|u|}$. — 0,5ن

4) ليكن x_0 من $\mathbb{R}$ وليكن h عنصرا من $]-1,0[\cup]0,1[$.

أ- تحقق أن : $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\int_0^1 e^{-x_0(1+t^2)}dt=\int_0^1 e^{-x_0(1+t^2)}\left(\frac{e^{-h(1+t^2)}-1+h(1+t^2)}{h(1+t^2)}\right)dt$. — 0,25ن

ب- باستعمال السؤال (3-ج) ، بين أن : $\left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\int_0^1 e^{-x_0(1+t^2)}dt\right|\le |h|e^2\int_0^1 e^{-x_0(1+t^2)}dt$. — 0,5ن

ج- استنتج أن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وأن : $(\forall x \in \mathbb{R})\quad f'(x)=-\int_0^1 e^{-x(1+t^2)}\,dt$. — 0.5ن

5) أ- أعط جدول تغيرات الدالة f. — 0.25ن

ب- حدد معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة التي أفصولها 0. — 0,25ن

6) أنشئ المماس (T) و المنحنى (C_f) . — 0,75ن

الجزء الثاني

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x)=f(x^2)$.

1) بين أن الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و أن : $(\forall x \in \mathbb{R})\quad g'(x)=-2x\,e^{-x^2}\int_0^1 e^{-(xt)^2}\,dt$. — 0,5ن

2) أ- باستعمال مكاملة بتغيير المتغير ، بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R})\quad g'(x)=-2e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}\,du$. — 0,5ن

ب- استنتج أن : $(\forall x \in \mathbb{R})\quad g(x)+\left(\int_0^x e^{-u^2}\,du\right)^2=\frac{\pi}{4}$. — 0,5ن

3) استنتج أن : $\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-u^2}\,du=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. — 0,25ن

الجزء الثالث :

لتكن $(u_n)_n$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0=0 \\ (\forall n \in \mathbb{N})\quad u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$$

1) بين أن : $(\forall x \in [0,1])\ : f(1)\le f(x)\le \frac{\pi}{4}$. — 0.25ن

2) بين أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}^+$ وأن $0<\alpha<1$. — 0,75ن

3) لكل n من $\mathbb{N}$ ، نضع : $v_n=u_{2n}$ و $w_n=u_{2n+1}$ و $h=f\circ f$.

أ- بين أن المتتالية $(v_n)_n$ تزايدية وأن $(w_n)_n$ تناقصية. — 0,5ن

ب- بين أن h قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و أن : $(\forall x \in [0,1])\ :\ |h'(x)|\le e^{-f(1)}$. — 0,5ن

ج- بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N})\quad |v_{n+1}-w_{n+1}|\le e^{-f(1)}|v_n-w_n|$. — 0,5ن

4) أ- تحقق أن $e^{-f(1)}<1$ و استنتج أن : $\lim_{n\to+\infty}(v_n-w_n)=0$. — 0,5ن

ب- استنتج أن المتتاليتين $(v_n)_n$ و $(w_n)_n$ متقاربتان و لهما نفس النهاية α . — 0,5ن

ج- استنتج نهاية المتتالية $(u_n)_n$. — 0,25ن