المملكة المغربية

وزارة التربية الوطنية والتعليم العالي وتكوين الأطر والبحث العلمي

أكاديمية جهة الدار البيضاء الكبرى

نيابة عين السبع الحي المحمدي

الامتحان التجريبي للسنة الثانية من سلك البكالوريا السنةالدراسية 2010/2009

الموضوع

الشعبة	العلوم الرياضية
المسلك	العلوم الرياضية أ العلوم الرياضية ب
المادة المعامل	الرياضيات 10
مدة الانجاز	4ساعات
الصفحة	1/3

لا يسمح باستخدام الآلة الحاسبة القابلة للبرمجة

التمرين الأول (3.5ن)

نذكر أن $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية و $(M_3(\mathbb{R}),+,\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي. نضع :

$$E=\left\{M(x,y)=\begin{pmatrix}x & y & 0\\ y & x & 0\\ 0 & 0 & x+y\end{pmatrix}\middle|(x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}\quad J=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\quad I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

1.أ. بين أن $(E,+,\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي — 0.5

ب.أكتب $M(x,y)$ بدلالة I و J و استنتج بعد الفضاء المتجهي E — 0.25

ج.أحسب J^2 و استنتج أن المصفوفة J قابلة للقلب وحدد مقلوبها J^{-1} — 0.5

2.أ.بين أن E جزء مستقر من $(M_3(\mathbb{R}),\times)$ — 0.5

ب.بين أن $(E,+,\times)$ حلقة تبادلية واحدية. — 0.75

ج. احسب الجذاء $M(1,1)\times M(1,-1)$

د. هل $(E,+,\times)$ جسم ؟ — 0.25

3. نضع $A=M(2,-1)$ و $O=M(0,0)$ — 0.25

أ.بين أن $A^2-4A+3I=O$ (O المصفوفة المنعدمة) — 0.25

ب.استنتج أن المصفوفة A قابلة للقلب و اكتب مقلوبها A^{-1} بدلالة I و J — 0.25

التمرين الثاني (3.5ن)

لكل $z\in C^*$ نضع $\varphi(z)=\frac{1}{\overline{z}}$ نعتبر التطبيق :

$$\begin{array}{rcl} f:P-\{0\} & \to & P-\{0\}\\ M(z) & \to & M'(\varphi(z))\end{array}$$

1. أ. بين أن $(E)\ \varphi(z)+i\overline{z}+(1+2i)=0\Leftrightarrow z^2+(2+i)z+i=0$ — 0.5

ب. حدد حلي المعادلة (E) $(\mathrm{Re}(z_1)>(\mathrm{Re}(z_2)))$ — 0.5

2. أ. بين أن $z_1+1=e^{i\frac{11\pi}{6}}$ و $z_2+1=e^{i\frac{7\pi}{6}}$ — 0.5

ب. استنتج الشكل المثلثي لكل من z_1 و z_2 — 0.5

3. نعتبر المعادلة $(E_n): z^{n-1}\varphi(z)=1$ حيث $n\in N$ و $n\geq 3$

أ. حل في C المعادلة (E_n) — 0.5

ب. بين أن مجموع حلول المعادلة (E_n) منعدم وأن صورها تكون مضلعا منتظما محاطا بدائرة يجب تحديدها — 0.5

ج. نضع $z=e^{i\alpha}+i$ بحيث $\alpha\in R-\left\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$ — 0.5

حدد الشكل المثلثي للعدد $u=z\varphi(z)$

التمرين الثالث (3 ن)

نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E): 5357x-11688y=487$ — 0.25

1 .أ. بين أن العدد 487 أولي — 0.25

ب.ليكن الزوج (x,y) حلا للمعادلة (E) ما هي القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين x و y ؟

ج. أحسب $PGCD(11688\ ;\ 5357)$ — 0.5

2 .أ. تحقق ان المعادلة (E) تكافئ المعادلة: $(E'): 11x-24y=1$ — 0.25

ب. باستعمال خوارزمية أقليدس حدد حلا خاصا للمعادلة (E') — 0.5

ج. حل المعادلة (E) — 0.5

3 .أ. حدد الأعداد الصحيحة النسبية k بحيث: $24k+11\equiv 0\ [5]$ — 0.25

ب. استنتج أنه إدا كان الزوج (x,y) حلا للمعادلة (E) بحيث 5 يقسم x فإن 5 يقسم $y-1$. — 0.5

مسألة (10 ن)

نعتبر المستوى P المنسوب للمعلم الممنظم المتعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$

الجزء الأول

نعتبر الدالة g المعرفة على $[1;+\infty[$ بما يلي $g(x)=x\ln(x)-x+1$

1. أ. أدرس تغيرات الدالة g — 0.75

ب. استنتج إشارة $g(x)$ لكل $x\in[1;+\infty[$ — 0.75

2. لتكن f الدالة المعرفة على $[1;+\infty[$ بما يلي : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x-1}{\ln(x)} & x>1 \\ f(1)=1 \end{cases}$ — 0.5

بين أن f دالة متصلة في 1

3. أ. بين أن لكل $t\in[1;+\infty[$ لدينا : $t-1-(t-1)^2\leq 1-\frac{1}{t}\leq t-1$ — 0.5

ب. استنتج أن : $\forall x\geq 1: \frac{(x-1)^2}{2}-\frac{(x-1)^3}{3}\leq x-1-\ln(x)\leq\frac{(x-1)^2}{2}$ — 0.75

ج. أحسب $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1-\ln(x)}{(x-1)^2}$ — 0.5

د. استنتج أن f قابلة للإشتقاق في 1 وأن $f'(1)=\frac{1}{2}$ — 0.5

4. اعط جدول تغيرات الدالة f — 0.5

الجزء الثاني

نعتبر الدالة المعرفة على $]1,+\infty[$ بما يلي : $\begin{cases} F(x)=\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln(t)}dt : x>1 \\ F(1)=\ln(2) \end{cases}$

1. أ. بين أن $\forall x>1 : \frac{x^2-x}{\ln(x^2)} \le F(x) \le \frac{x^2-x}{\ln(x)}$ — 0.75

   ب. إستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}$ — 0.5

2. أ. بين أنه لكل x من $]1,+\infty[$ و لكل t من $[x;x^2]$ لدينا — 0.5

   $$\frac{x}{t\ln(t)} \le \frac{1}{\ln(t)} \le \frac{x^2}{t\ln(t)}$$ — 0.75

   ب. استنتج أنه لكل x من $]1;+\infty[$ لدينا : $x\ln(2) \le F(x) \le x^2\ln(2)$ — 0.5

   ج. بين أن f متصلة في 1 — 0.5

3. أ. بين أن F قابلة للاشتقاق على $]1,+\infty[$ وأن $\forall x>1 : F'(x)=f(x)$ — 0.75

   ب. ليكن x من $]1,+\infty[$ بين انه يوجد c من $]1,x[$ بحيث $F(x)-F(1)=(x-1)F'(c)$ — 0.5

   ج. استنتج أن F قابلة للاشتقاق على يمين 1 وأن $F'(1)=1$ — 0.5

4. اعط جدول تغيرات F وأنشئ منحنى F — 0.5