

تمرين 1

3, 5pnt

نعتبر * قانون التركيب الداخلي المعرف على المجموعة \mathbb{C} بما يلي :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2 : a * b = i(a + 1)(b + 1) - 1$$

- ① بين أن * قانون تبادلي في \mathbb{C} . 0, 25
- ② بين أن * قانون تجميعي في \mathbb{C} . 0, 25
- ③ اوجد في $(\mathbb{C}, *)$ العنصر المحايد. 0, 25
- ④ حدد العناصر القابلة للمماثلة في $(\mathbb{C}, *)$. 0, 25
- ⑤ نعتبر المجموعة $\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} / |z + 1| = 1\}$
- أ) بين أن $(\mathbb{S}, *)$ جزء مستقر من $(\mathbb{C}, *)$. 0, 5
- ب) بين أن $(\mathbb{S}, *)$ زمرة تبادلية. 0, 5
- ⑥ حل في \mathbb{C} المعادلة : $z * z = 1 + (i * z)$. 0, 5
- ⑦ حدد و أنشئ في المستوى العقدي المجموعة التالية : $E = \{M(z) / z * z \in i\mathbb{R}\}$. 0, 5
- ⑧ ليكن $\theta \in]0, \pi[$ نضع $z = -1 + e^{i\theta}$
- أ) حدد معيار و عمدة العدد العقدي z . 0, 25
- ب) حدد عمدة و معيار العدد العقدي $z * z$. (ناقش حسب قيم θ) 0, 25

تمرين 2

3pnt

في المستوى العقدي \mathcal{P} المنسوب الى معلم متعامد ممنظم (O, \vec{u}, \vec{v}) ، نعتبر النقط A و B و C التي ألقاها على التوالي : $a = 3 + 5i$ و $b = -4 + 2i$ و $c = 1 + 4i$. ليكن f التحويل في المستوى \mathcal{P} الذي يربط كل نقطة $M(z)$ من المستوى \mathcal{P} بالنقطة $M'(z')$ بحيث

$$z' = (2 - 2i)z + 1 :$$

- ① حدد طبيعة التحويل f و عناصره المميزة. 0, 25
- ② أ) حدد لحق النقطة B' صورة B بالتطبيق f . 0, 25
- ب) بين أن المستقيمين (CB') و (CA) متعامدان. 0, 5
- ③ لتكن M نقطة ذات لحق $z = x + iy$ حيث $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ ، و لتكن M' صورة M بالتحويل f
- بين أن المتجهتين $\vec{CM'}$ و \vec{CA} متعامدان اذا و فقط اذا كان $x + 3y = 2$. 0, 5
- ④ نعتبر المعادلة $(E) : x + 3y = 2$ حيث $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.
- أ) تحقق من أن الزوج $(-4, 2)$ يحقق المعادلة (E) . 0, 25
- ب) حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة (E) . 0, 5
- ج) حدد مجموعة النقط M من المستوى العقدي \mathcal{P} التي من أجلها يكون زوج احدائيتها مكون من أعداد نسبية من المجال $[-5, 5]$ حيث تكون المتجهتان $\vec{CM'}$ و \vec{CA} متعامدان. أنشئ شكلا اجماليًا. 0, 75

تمرين 3

3, 5pnt

ليكن a و b عددين صحيحين طبيعيين غير منعدمين بحيث 2027 يقسم $a^3 + b^3$.

الجزء 1

- ① أثبت أن 2027 عدد أولي. 0, 5
- ② بين أن $a^{2025} = -b^{2025}$ [2027]. 0, 5
- ③ بين أن : 2027 يقسم a اذا و فقط اذا كان 2027 يقسم b . 0, 5
- ④ نفترض أن 2027 يقسم a . بين أن 2027 يقسم $(a + b)$. 0, 5
- ⑤ عكسيا نفترض أن 2027 لا يقسم a .
 (أ) بين أن $a^{2026} = b^{2026}$ [2027]. 0, 5
 (ب) بين أن $a^{2025}(a + b) = 0$ [2027]. 0, 5
 (ج) استنتج أن 2027 يقسم $(a + b)$. 0, 5

الجزء 2

Bonus

نعتبر في $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ المعادلة $(E) : x^3 + y^3 = 2027(1 + xy)$.

- ① بين أنه اذا كان (x_0, y_0) حل للمعادلة (E) فإنه يوجد $k \in \mathbb{N}$ بحيث $(x_0 + y_0) = 2027k$. 0, 5
- ② تحقق من أن : $k(x_0 - y_0)^2 + (k - 1)x_0y_0 = 1$. 0, 5
- ③ بين أن $k = 1$, ثم أوجد حلول المعادلة (E) . 0, 5

تمرين 4

10pnt

الجزء 1

ليكن n عدد من $\mathbb{N}^* - \{1\}$. نعتبر الدالة f_n للمتغير الحقيقي x المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي:

$$f_n(x) = n(x - 1) - x \ln x$$

- ① بين أن f_n قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ محسدا مشتقتها. 0, 5
- ② ادرس تغيرات f_n و اعط جدول تغيراتها. 0, 75
- ③ اثبت أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n في $]1, +\infty[$ و قارن بين α_n و e^{n-1} . 0, 75
- ④ (أ) قارن بين $f_n(x)$ و $f_{n+1}(x)$ لكل $x > 0$. 0, 75
 (ب) ادرس رتابة (α_n) . 0, 5
 (ج) استنتج أن (α_n) غير مكبورة. 0, 5
 (د) تحقق من أن $e^{\frac{\alpha_n - 1}{\alpha_n}} = n \sqrt{\alpha_n}$. 0, 5

الجزء 2

ليكن n عدد من $\mathbb{N}^* - \{1\}$. نعتبر الدالة g_n للمتغير الحقيقي x المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي:

$$\begin{cases} g_n(x) = \frac{(\ln x)^n}{x - 1} & x \neq 1, x > 0 \\ g_n(1) = 0 \end{cases}$$

- ① بين أن g_n قابلة للاشتقاق في 1 و حدد $g'_n(1)$ حسب قيم n . 0, 5
- ② بين أن g_n قابلة للاشتقاق على $]0, 1[$ و $]1, +\infty[$ محسدا $g'_n(x)$ لكل x من $]0, +\infty[- \{1\}$. 0, 75

3 اعط جدول تغيرات الدالة g_n في الحالتين :

(أ) حالة $n = 2$ 0,5

(ب) حالة n فردي أكبر من أو يساوي 3. 0,5

4 انشئ (C_2) منحنى g_2 في م.م.م $\|\vec{i}\| = 2cm$ (نأخذ : $\alpha_2 \simeq 5$ و $g_2(\alpha_2) \simeq 0,65$). 0,5

الجزء 3

لكل n من \mathbb{N}^* نضع $I_n = \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{3} dx$

1 اثبت أن $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متتالية متقاربة . 0,75

2 باسعمال مكاملة بالأجزاء برهن أن $I_{n+1} = \frac{e}{3} - (n+1)I_n$ 0,75

3 احسب I_1 و I_2 . 0,75

4 اسنتج قيمة $J = \int_0^{\frac{1}{3}} e^{3\sqrt{3x}} dx$ 0,75



Scanner le code QR pour avoir la solution.