

تمرين 1

11, 5pnt

الجزء 1 (4, 25)

$$\begin{cases} U(x) = \frac{x}{e^x - 1} \text{ si } x \neq 0 \\ U(0) = 1 \end{cases}$$

لتكن U الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R}^+ بما يلي :

1 اثبت أن الدالة U متصلة على \mathbb{R}^+ و احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} U(x)$ 0, 5

2 ليكن x عدد حقيقي موجب قطعاً.

أ) باستعمال مكاملة بالاجزاء مرتين أثبت أن : $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} \int_0^1 (1-t)^2 e^{tx} dt$ 0, 5

ب) أثبت أن $\int_0^1 (1-t)^2 e^{tx} dt \leq \int_0^1 e^{tx} dt$ و استنتج أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2}$ 0, 5

3 أثبت أن الدالة U قابلة للاشتقاق على يمين 0 و أن $U'_d(0) = -\frac{1}{2}$ 0, 25

4 أثبت أنه : $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}) \left(U'(x) = (1-x-e^{-x}) \frac{e^x}{(e^x-1)^2} \right)$ 0, 5

5 أثبت أنه : $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}) (e^{-x} \geq 1-x)$ و اعط جدول تغيرات الدالة U . 0, 5

6 حل في \mathbb{R}^{+*} المعادلة $U(x) = x$ 0, 25

7 نعتبر المتتالية العددية (a_n) المعرفة على \mathbb{N} بما يلي :

$$\begin{cases} a_{n+1} = U(a_n) \\ a_0 = 0 \end{cases}$$

أ) نقبل أن $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}) (U''(x) > 0)$ بين أن $\left(|U'(x)| \leq \frac{1}{2} \right)$ و أن $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}) (0 < U(x) \leq 1)$ 0, 5

ب) أثبت أنه $\left(|a_{n+1} - \ln 2| \leq \frac{1}{2} |a_n - \ln 2| \right)$ 0, 5

ج) أثبت أن المتتالية (a_n) متقاربة و احسب نهايتها. 0, 25

الجزء 2 (5, 25)

لتكن f الدالة المعرفة على \mathbb{R} بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = e^x \sqrt{1 - e^{2x}} \text{ si } x \leq 0 \\ f(x) = \ln(U(x)) \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

ليكن (C_f) منحنى الدالة f في المستوى المنسوب الى م.م.م (O, \vec{i}, \vec{j}) بحيث $\|\vec{i}\| = 2cm$

1 أثبت أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ و أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ 0, 5

2 أثبت أن $(f(x) = \ln x - \ln(1 - e^{-x}) - x)$ و استنتج أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$ 0, 75

و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + x = +\infty$ و أول هندسيا النتيجة.

3 أثبت أن الدالة f متصلة على \mathbb{R} . 0, 5

4 أدرس قابلية اشتقاق الدالة f في 0. (يمكن استعمال السؤال 3 الجزء 1) 0, 5

5 أثبت أنه لكل x من \mathbb{R}^* :

$$\begin{cases} f'(x) = e^x \frac{(1 - 2e^{2x})}{\sqrt{1 - e^{2x}}} \text{ si } x < 0 \\ f'(x) = \frac{U'(x)}{U(x)} \text{ si } x > 0 \end{cases}$$
 0, 5

<p>6 اعط جدول تغيرات الدالة f. 0,5</p> <p>7 ليكن g قصور الدالة f على المجال $I =]-\infty, -\frac{\ln 2}{2}]$. 0,25</p> <p>(أ) أثبت أن g تقابل من المجال I نحو مجال J يجب تحديده. 0,5</p> <p>(ب) حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J. 0,5</p> <p>8 أنشئ المنحنيان (C_f) و (C_g^{-1}) في نفس المعلم. (نأخذ $\frac{\ln 2}{2} \approx 0,35$) 0,5</p> <p>9 ليكن Δ حيز المستوى المحصور بالمنحنى (C_f) و محور الأفصيل و المستقيمين ذو المعادلة $x = -\ln 2$ و $x = -\frac{\ln 2}{2}$. 0,5</p> <p>(أ) احسب التكامل: $\int_{-\ln 2}^{-\frac{\ln 2}{2}} f(t)dt$ يمكن وضع $e^t = \sin x$. 0,5</p> <p>(ب) استنتج مساحة الحيز Δ. 0,25</p>	
<p>الجزء 3 (ن2)</p>	
<p>لتكن G الدالة المعرفة على \mathbb{R}^+ بما يلي:</p> $\begin{cases} G(x) = \int_x^{2x} f(t)dt & \text{si } x > 0 \\ G(0) = 0 \end{cases}$	
<p>1 تحقق أن الدالة G معرفة لكل x من \mathbb{R}^+. 0,25</p> <p>2 أثبت أن $x \ln \left(\frac{2x}{e^{2x} - 1} \right) \leq G(x) \leq x \ln \left(\frac{x}{e^x - 1} \right)$. 0,25</p> <p>3 استنتج أن G متصلة و قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}^+. 0,25</p> <p>4 احسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x)$. 0,25</p> <p>5 أثبت أن G قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}^{+*} و أثبت أن $(\forall x > 0) \left(G'(x) = \ln \left(\frac{4x}{(e^x + 1)^2(e^x - 1)} \right) \right)$. 0,5</p> <p>6 نقبل أن $(\forall x > 0) ((e^x + 1)^2(e^x - 1) > 4x)$. اعط جدول تغيرات الدالة G. 0,5</p>	

<p>تمرين 2</p>	<p>5,5pnt</p>
<p>الجزء 1 (ن1)</p>	
<p>ليكن $m \in \mathbb{C}$ نعتبر في \mathbb{C} المعادلة التالية:</p> $(E_m) : z^2 - (1 + 2m + im)z + 2m(1 + im) = 0$ <p>1 تحقق من أن مميز المعادلة هو: $\Delta = (1 - 2m + im)^2$. 0,5</p> <p>2 حل في \mathbb{C} المعادلة (E_m). 0,5</p>	
<p>الجزء 2 (ن4,5)</p>	
<p>المستوى العقدي (P) منسوب الى م.م.م $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. نعتبر النقط A و B و C التي ألقاها على التوالي $-i$ و $b = \frac{2m}{1 + im}$ و $m \neq i$ مع m.</p> <p>1 (أ) بين أن: $m ^2 = \text{Im}(m)$ $\Leftrightarrow b \in \mathbb{R}$. 0,5</p> <p>(ب) استنتج مجموعة النقط $M(m)$ بحيث $b \in \mathbb{R}$. 0,5</p>	

<p>Ⓐ) بين أن النقط A و M و O مستقيمية اذا و فقط اذا كان $m \in i\mathbb{R}$.</p>	0,5
<p>ب) أثبت أنه اذا كان $m \neq 0$ فإن $\frac{b+i}{b} = \frac{m+i}{2m}$.</p>	0,5
<p>ج) استنتج أنه اذا كان $m \notin i\mathbb{R}$ فإن النقط A و B و O و M متداورة.</p>	0,5
<p>Ⓢ) نعتبر f التطبيق المعرف من $\{O\} - (P)$ نحو (P) و الذي يحول $M'(z')$ إلى $M''(z'')$ بحيث $z'' = (1 + im)z'$.</p>	
<p>أ) حدد مجموعة النقط $M(m)$ بحيث يكون التطبيق f دورانا.</p>	0,5
<p>ب) علما أن f دوران بين أنه اذا كان $z' \neq 0$ فإن $z'' \neq z'$.</p>	0,5
<p>ج) علما ان $(OM') \perp (M'M'')$. بين أن $m \in \mathbb{R}$ و أن $1 + im = \sqrt{1 + m^2}e^{i\arctan(m)}$.</p>	1
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> تمرين 3 </div>	
3pnt	
<p>نعتبر في \mathbb{C} المعادلة التالية $2z^2(1 - \cos(2\theta)) - 2z \sin(2\theta) + 1 = 0$ (E) حيث $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \cup \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.</p>	
<p>Ⓐ) حدد z_1 و z_2 حلي المعادلة (E).</p>	1
<p>Ⓑ) اكتب على الشكل المثلي العددين z_1 و z_2 (ناقش حسب قيم θ).</p>	1
<p>Ⓒ) نعتبر النقط $I\left(\frac{1}{2\sin\theta}\right)$ و $A\left(\frac{e^{-i\theta}}{2\sin\theta}\right)$ و $B\left(\frac{e^{i\theta}}{2\sin\theta}\right)$.</p>	
<p>أ) حدد المجموعة (Γ) للأعداد الحقيقية θ من $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \cup \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ بحيث يكون المثلث OAB متساوي الساقين و قائم الزاوية في O.</p>	0,5
<p>ب) اعط الكتابة العقدي للدوران الذي مركزه I و يحول A الى B.</p>	0,5



Scanner le code QR pour avoir la solution après 12 :30.

بالتوفيق