

مسألة 9,5 نقطة

الجزء الأول:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{x+1-e^{-x}} ; x \neq 0 \\ f(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي:

1- أ- بين أن مجموعة تعريف الدالة f هي \mathbb{R}

ب- احسب نهايتي الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$

ج- ادرس اتصال الدالة f في الصفر

$$2- \text{أ- بين أن: } \forall x \in \mathbb{R}^* \quad \frac{e^{-x}+x-1}{x^2} - \frac{1}{2} = \frac{x}{2} \int_1^0 (1-u)^2 e^{-ux} du$$

يمكنك استعمال الكاملة بالأجزاء مرتين.

$$\text{ب- بين أن: } \forall x \in \mathbb{R}^* \quad \left| \int_1^0 (1-u)^2 e^{-ux} du \right| \leq \frac{1-e^{-x}}{x}$$

ج- استنتج قابلية اشتقاق الدالة f في الصفر

$$3- \text{أ- ادرس رتبة الدالة } t \text{ المعرفة بما يلي: } t(x) = 1 - (x+1)e^{-x}$$

ب- ضع جدول تغيرات الدالة f

ج- بين أن تقابل من \mathbb{R} نحو مجال f يجب تحديده.

4- ليكن f^{-1} التقابل العكسي للتقابل f

$$\text{أ- تحقق من أن: } \forall x \in]0,1[\quad f^{-1}(x) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = x$$

ب- استنتج أن المعادلة $f^{-1}(x) = f(x)$ تقبل حلا وحيدا β حيث أن: $1 \leq \beta \leq e^{-1}$ و

$$5- \text{نعتبر المتتالية العددية } (u_n) \text{ المعرفة بما يلي: } \begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = e^{-u_n} \end{cases}$$

أ- تحقق من أن: $\forall n \in \mathbb{N} \quad e^{-1} \leq u_n \leq 1$

ب- بين أن: $(\exists k \in]0;1[) (\forall x, y \in [-1;1]) |e^{-x} - e^{-y}| \leq k|x-y|$

ج- استنتج أن: $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - \beta| \leq k^n |1 - \beta|$

د- بين أن المتتالية (u_n) متقاربة محدا قيمة مقربة نهايتها بالدقة 10^{-3}

الجزء الثاني:

$$\begin{cases} F(x) = \int_x^{2x} \frac{f(t)}{t} dt ; x > 0 \\ F(0) = \frac{\ln(2)}{2} \end{cases}$$

لتكن F الدالة العددية المعرفة بما يلي:

1- تحقق من أن مجموعة تعريف الدالة F هي \mathbb{R}

$$2- \text{أ- بين أن: } \forall x \in]0; +\infty[\quad \frac{x}{x+1} \leq f(x) \leq 1$$

ب- استنتج نهاية الدالة F عند $+\infty$

3- بين أن الدالة قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ وحدد دالتها المشتقة

$$4- \text{تقبل أن: } \forall t \in]0; \alpha[\quad \left| f(t) - \frac{t}{2} - \frac{t^2}{2} \right| \leq t\sqrt{t}$$

$$\text{أ- بين أن: } \forall x \in]0; \alpha[\quad \left| F(x) - \frac{\ln 2}{2} - \frac{x}{2} \right| \leq (4 - \sqrt{2})x\sqrt{x}$$

ب- استنتج أن الدالة F متصلة على اليمين في الصفر وقابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر.

ج- ضع جدول تغيرات الدالة F

د- أنشئ - كمرئوض الدالة F في معلم متعامد بمنظم

التمرين الأول : (3,5 ن)

تذكير: $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة واحدة و $(M_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي.

(1) نرود المجموعة $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ بقانون التركيب الداخلي T المعرف بما يلي:

$$(\forall (a;b) \in G)(\forall (c;d) \in G) \quad (a;b)T(c;d) = (ac; ad+bc)$$

أ- بين أن القانون T تبادلي وتجميعي 0.5

ب- تحقق من أن $(1;0)$ هو العنصر المحايد للقانون T 0.25

ج- بين أن (G, T) زمرة تبادلية 0.25

د- ليكن n من $\mathbb{N}^* - \{1\}$, بين أن $(-1;1)T \dots T(-1;1) = ((-1)^n; n(-1)^{n+1})$ 0.5

(2) لكل $(a;b)$ من \mathbb{R}^2 , نضع: $M_{(a;b)} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ ونعتبر المجموعة $E = \{M_{(a;b)} / (a;b) \in G\}$

أ- بين أن E جزء مستقر من $(M_3(\mathbb{R}), \times)$ 0.25

ب- بين أن التطبيق: $f: G \rightarrow E$ $(a;b) \rightarrow M_{(a;b)}$ تشاكل تقابلي من (G, T) نحو (E, \times) 0.5

ج- استنتاج بنية $(E; \times)$ ثم حدد مقلوب كل مصفوفة $M_{(a;b)}$ من E 0.5

د- نضع: $A = M_{(-1;1)}$, احسب A^n لكل n من $\mathbb{N}^* - \{1\}$ 0.25

(3) نعتبر المجموعة $F = \{M_{(a;b)} / (a;b) \in \mathbb{R}^2\}$

أ- بين أن $(F; +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي 0.25

ب- حدد $\dim F$ 0.25

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد سمنظم و مباشر $(0, u, v)$ لكل z من $\mathbb{C} - \{-i\}$ نضع $\varphi(z) = i \left(\frac{z-i}{z+i} \right)$ و نعتبر النقطتين A و B التي لحيتهما $z_A = 2i$ و $z_B = i$ و لتكن النقطة M ذات اللتحق z .

I (1) بين أن $(\forall z \in \mathbb{C} - \{-i\}) : |\varphi(z)| = \frac{4|z|}{|z+1|}$ 0,50

و أن $(\forall z \in \mathbb{C} - \{i, 2i\}) : \arg(\varphi(z)) \equiv (\overline{BM}, \overline{AM}) + \frac{\pi}{2} [2\pi]$ 0,50

(2) حدد طبيعة كل من المجموعتين $E = \{M(z) / |\varphi(z)| = 1\}$ و $F = \{M(z) / \varphi(z) \in i\mathbb{R}\}$

II (1) بين أن : 0,50

$(\forall z \in \mathbb{C} - \{-i\}) : |\varphi(z) - i| = \frac{1}{|z-i|}$; $(\forall z \in \mathbb{C} - \{-i\}) : \arg(\varphi(z) - i) = -\arg(z - i) [2\pi]$

(2) بين أنه إذا كانت النقطة $M(z)$ تنتمي إلى الدائرة (C) التي مركزها B و شعاعها $\frac{1}{2}$ فإن النقطة $M'(\varphi(z))$ تنتمي إلى دائرة يتم تحديدها.

(3) أنشئ النقطة M' انطلاقًا من النقطة M 0,25

III (1) حل في \mathbb{C} المعادلة $\varphi(z) = z$ نمرز ب u و v حل هذه المعادلة بحيث $\Re(u) = 1$.

(2) ليكن $z \in \mathbb{C} - \{i, u, v\}$ و $M(z)$ و $M'(\varphi(z))$ و $C(u)$ و $D(v)$.

(a) بين أن $\frac{\varphi(z)-u}{\varphi(z)-v} = -\frac{z-u}{z-v}$ 0,25

(b) استنتج أن $(\overline{M'D}, \overline{M'C}) \equiv \pi + (\overline{MD}, \overline{MC}) [2\pi]$ 0,25

(c) بين أنه إذا كانت النقط M و C و D مستقيمة فإن النقط M' و M و C و D مستقيمة وإذا كانت M و C و D غير مستقيمة فإن النقط M' و M و C و D تكون متداورة.

التمرين 3 3,5

(1) حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة $35x - 192y = 1$ 0,25

(ب) بين ان المعادلة $35x = 1$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{Z}/192\mathbb{Z}$ ثم استنتج حلها 0,50

(2) بين انه يوجد عددين اولين مختلفين p و q يحققان: 0,50

$PGCD((p-1), (q-1)) = 4$ و $(p-1)(q-1) = 192$

(3) ليكن $a \in \mathbb{N}^*$

(أ) بين ان $a^{385} \equiv a [13]$ 0,50

(ب) استنتج ان $a^{385} \equiv a [221]$ 0,50

(4) تحقق من $2008 \equiv 19 [221]$ 0,25

(ب) استنتج مما سبق باقي القسمة الاقليدية للعدد $2008^{385^{2008}}$ على 221 0,50

(5) ليكن b مجموع ارقام العدد $2008^{385^{2008}}$ في نظمة العد العشري حدد باقي القسمة الاقليدية لـ b على 9 0,50