

الصفحة 1	4	**
الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا الدورة الاستدراكية 2020 - الموضوع -		
المملكة المغربية وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والتعليم العالي والبحث العلمي المركز الوطني للتقويم والامتحانات		
SSSSSSSSSSSSSSSSSSSSS		RS 24
المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	المعامل
4		9

• المدة الزمنية لإنجاز الموضوع هي 4 ساعات.

- يتكون الموضوع من (4) صفحات مرقمة من 1/4 إلى 4/4
- يتكون الموضوع من أربعة تمارين مستقلة فيما بينها.
- المترشح ملزم بإنجاز التمرين 3 و التمرين 4 و الاختيار بين إنجاز إما التمرين 1 وإما التمرين 2
- على المترشح أن ينجز في المجموع ثلاثة (3) تمارين:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{التمرين 1 و يتعلق بالحسابات (اختياري)} \\ \dots\dots\dots 3.5 \text{ نقط} \end{array} \right. - \text{و إما}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{التمرين 2 ويتعلق بالبنيات الجبرية (اختياري)} \\ \dots\dots\dots 3.5 \text{ نقط} \end{array} \right.$$

- التمرين 3 و يتعلق بالأعداد العقدية (إجباري) 3.5 نقط

- التمرين 4 و يتعلق بالتحليل (إجباري) 13 نقطة

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيفما كان نوعها

اختر وأنجز إما التمرين 1 وإما التمرين 2

و أنجز إجباريا التمرين 3 و التمرين 4

التمرين 1:(3.5 نقاط/اختياري) [إذا انجزت التمرين 1 فلا ينبغي لك أن تنجز التمرين 2]

ليكن p و q عددين أوليين يحققان : $p < q$ و $[pq] = 1^{o-1} p^+ q^-$

0.5 1- أ) بين أن p و 9 أوليان فيما بينهما.
 1 ب) استنتج أن: $[p] = 1^{o-1} p^{-1}$ و أن $[p] = 1^{o-1} q^+$
 0.5 2- أ) بين أن $p - 1$ و q أوليان فيما بينهما .
 0.5 ب) باستعمال ميرهنة بوزو ، بين أن: $p = 2$
 0.5 3- أ) باستعمال ميرهنة فيرما ، بين أن : $[q] = 1^{o-1} q^{-1}$
 0.5 ب) استنتج أن: $q = 5$

الصفحة	2	RS 24	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة الاستدراكية 2020 - الموضوع - مادة: الرياضيات- شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)
4			

التمرين 2: (3.5 نقط/اختياري) [إذا انجزت التمرين 2 فلا ينبغي لك أن تنجز التمرين 1]

نرمز بالرمز $M_3(i)$ إلى مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 3 ذات معاملات حقيقية.

نذكر أن $(M_3(i), +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي بعده 9 و أن $(M_3(i), +, \cdot)$ حلقة غير تبادلية و واحدة

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ و } O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ صفرها و حددتها}$$

$$E = \left\{ M(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & -y & -y \\ 0 & z & 0 \\ y & x-z & x \end{pmatrix} \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

الجزء الأول:

1-أ) بين أن E فضاء متجهي جزئي للفضاء $(M_3(i), +, \cdot)$ 0.25

ب) حدد أساسا للفضاء $(E, +, \cdot)$ 0.5

2-أ) تحقق أن:

$$(x, y, z) \in E, (x', y', z') \in E; M(x, y, z) \cdot M(x', y', z') = M(xx' - yy', xy' + yx', zz') 0.25$$

ب) بين أن $(E, +, \cdot)$ حلقة تبادلية 0.5

الجزء الثاني:

نعتبر المجموعة الجزئية F من E للمصفوفات على الشكل $M(x, y, 0)$ حيث $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

1- بين أن F زمرة جزئية للزمرة $(E, +)$ 0.25

2- ليكن φ التطبيق المعروف من E نحو E بما يلي:

$$\varphi(x, y) = (x + iy, y) \quad ; \quad \varphi(x + iy, y) = M(x, y, 0)$$

أ- بين أن φ تشاكل من $(E, +)$ نحو $(E, +)$ 0.25

ب- استنتج أن $(F^*, +)$ زمرة تبادلية. $(F^* = F - \{O\})$ 0.5

ج- بين أن $(F, +, \cdot)$ جسم تبادلي يتم تحديد وحدته. 0.5

$$3- أ) تحقق أن: $M(x, y, 0) = O$; $M(x, y, 0) \in F$ 0.25$$

ب) استنتج أن لا أحد من عناصر المجموعة الجزئية F يقبل مقلوبا بالنسبة للضرب في $M_3(i)$ 0.25

الصفحة	RS 24	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة الاستدراكية 2020 - الموضوع - مادة: الرياضيات- شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	
3			
4			

التمرين 3: (3.5 نقطة/اجباري)

1- ليكن m عددا حقيقيا غير منعدم.

نعتبر في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ ، المعادلتين:

$$(E): z^2 + 2z + 1 + m^2 = 0 \quad \text{و} \quad (F): z^3 + 2(1-i)z^2 + (1+m^2-4i)z - 2i(1+m^2) = 0$$

0.5 1- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E)

0.25 2- أ) بين أن المعادلة (F) تقبل حلا تخيليا صرفا يتم تحديده.

0.5 ب) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (F)

II- المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O; u, v)$

نعتبر النقطتين: $A(-1+im)$ و $B(-1-im)$

لتكن W منتصف القطعة $[AB]$ و A' منتصف القطعة $[OB]$ و B' منتصف القطعة $[OA]$

الدوران الذي مركزه W و زاويته $\frac{\pi}{2}$ يحول A إلى $P(p)$ و الدوران الذي مركزه A' و زاويته

$\frac{\pi}{2}$ يحول B إلى $Q(q)$ و الدوران الذي مركزه B' و زاويته $\frac{\pi}{2}$ يحول O إلى $R(r)$

1.5 1- بين أن: $p = -1+m$ و $q = \frac{1-i}{2}(-1-im)$ و $r = \bar{q}$

0.25 2- أ) تحقق أن: $q - r = -ip$

0.5 ب) استنتج أن: $OP = QR$ و أن المستقيمين (OP) و (QR) متعامدان.

التمرين 4: (13 نقطة/اجباري)

الجزء الأول:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I = [0,1]$ بما يلي: $f(x) = x \ln(2-x)$

و ليكن (C) تمثيلها المبياني في معلم متعامد ممنظم $(O; i, j)$

0.75 1- أ) بين أن f قابلة للاشتقاق على I و أن: $f'(x) = \ln(2-x) - \frac{x}{2-x}$; $x \in I$

0.5 ب) بين أن الدالة المشتقة f' تناقصية قطعا على I

0.75 ج) بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد $a \in]0,1[$ بحيث: $f'(a) = 0$ و أن: $f(a) = \frac{a^2}{2-a}$

0.75 2- أ) ادرس تغيرات f ، ثم اعط جدول تغيراتها.

0.5 ب) بين أن المنحنى (C) مقعر.

0.5 ج) بين أن: $f(x) \leq f'(t)(x-t) + f(t)$; $(x \in I, t \in I)$

0.5 د) استنتج أن لكل x من I : $f(x) \leq x \ln 2$ و $f(x) \leq -x+1$

0.5 3- أنشئ المنحنى (C) (نأخذ: $\|i\| = 2cm$)

الصفحة	4	RS 24	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة الاستدراكية 2020 - الموضوع - مادة: الرياضيات- شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)
4			

4- احسب، ب cm^2 ، مساحة جزء المستوى المحصور بالمنحنى و المستقيمات المعرفة بالمعادلات: $x = 0$ و $x = 1$ و $y = 0$

0.75

الجزء الثاني:

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا أكبر من أو يساوي 2.

نعتبر الدالة f_n المعرفة على $I = [0,1]$ بما يلي: $f_n(x) = x^n \ln(2-x)$

1- (أ) تحقق أن f_n موجبة على I و أن $f_n(0) = f_n(1)$

0.5

(ب) بين أنه يوجد على الأقل $a_n \in]0,1[$ بحيث: $f'_n(a_n) = 0$

0.5

2- (أ) بين أن f_n قابلة للاشتقاق على I و أن: $f'_n(x) = x^{n-1}g_n(x)$ حيث: $x \in I$

0.75

$$g_n(x) = n \ln(2-x) - \frac{x}{2-x}$$

(ب) بين أن الدالة g_n تناقصية قطعاً على I

0.5

(ج) استنتج أن a_n وحيد.

0.5

3- نعتبر المتتالية $(a_n)_{n \geq 2}$ المعرفة حسب ما سبق.

(أ) بين أن: $f_n(a_n) = \frac{1}{n} \cdot \frac{a_n^{n+1}}{2-a_n}$ ، $f_n(a_n) = 0$ ، استنتج أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(a_n) = 0$

1

(ب) بين أن: $g_n(a_{n+1}) = -\ln(2-a_{n+1})$ ، استنتج أن المتتالية $(a_n)_{n \geq 2}$ تزايدية قطعاً.

1

(ج) بين أن المتتالية $(a_n)_{n \geq 2}$ متقاربة.

0.25

(د) بين أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$

0.5

الجزء الثالث:

لكل عدد صحيح طبيعي $n \geq 2$ ، نضع: $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$

1- بين أن المتتالية $(I_n)_{n \geq 2}$ تناقصية، استنتج أنها متقاربة.

0.75

2- باستعمال مكاملة بالأجزاء، بين أن: $I_n = \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{2-x} dx$

0.5

3- بين أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ ، ثم استنتج أن: $(n \geq 2)$ ، $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$

0.75

انتهى