الامتحان الوطني الموحد
لنيل شهادة البكالوريا
الدورة العادية 2013

مادة الرياضيات
العلوم الرياضية أ و ب
مدة الإنجاز : أربع ساعات
المعامل: 9

التمرين الأول : (3,5 ن)

نذكر أن $(\mathbb{Z},+,\times)$ حلقة واحدية تبادلية و كاملة .

1) نزود $\mathbb{Z}$ بقانون التركيب الداخلي $*$ المعرف بما يلي : $x * y = x + y - 2 \quad ; \quad \forall(x,y)\epsilon\mathbb{Z}^2$

أ) بين أن القانون $*$ تبادلي و تجميعي . — 0,50 ن

ب) بين أن : $(\mathbb{Z},*)$ تقبل عنصرا محايدا يتم تحديده . — 0,25 ن

ج) بين أن : $(\mathbb{Z},*)$ زمرة تبادلية . — 0,50 ن

2) نزود $\mathbb{Z}$ بقانون التركيب الداخلي $\top$ المعرف بـ : $x \top y = xy - 2x - 2y + 6 \; ; \; \forall(x,y)\epsilon\mathbb{Z}^2$

و نعتبر التطبيق f من $\mathbb{Z}$ نحو $\mathbb{Z}$ المعرف بما يلي : $f(x) = x + 2 \quad ; \quad (\forall x\epsilon\mathbb{Z})$

أ) بين أن التطبيق f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{Z},\times)$ نحو $(\mathbb{Z},\top)$. — 0,50 ن

ب) بين أن : $(x * y) \top z = (x \top z) * (y \top z) \quad ; \quad \forall\,(x,y,z)\,\epsilon\,\mathbb{Z}^3$ — 0,25 ن

3) إستنتج من كل ما سبق أن : $(\mathbb{Z},*,\top)$ حلقة تبادلية و واحدية . — 0,75 ن

4) أ) بين أن : $x \top y = 2$ إذا وفقط إذا كان $x = 2$ أو $y = 2$. — 0,25 ن

ب) استنتج أن الحلقة $(\mathbb{Z},*,\top)$ كاملة . — 0,25 ن

ج) هل $(\mathbb{Z},*,\top)$ جسم ؟ (علل الجواب) — 0,25 ن

التمرين الثاني : (3,5 ن)

I ليكن a عددا عقديا غير منعدم .

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z :

$$(E) : 2z^2 - (3 + i\sqrt{3})az + (1 + i\sqrt{3})a^2 = 0$$

1) تحقق أن مميز المعادلة (E) هو : $(-1 + i\sqrt{3})^2 a^2$. — 0,25 ن

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) . — 0,50 ن

II المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$

نعتبر النقط A و B و M التي ألحاقها على التوالي : a و $b = ae^{\frac{i\pi}{3}}$ و z .

ليكن r الدوران الذي مركزه M و زاويته $\frac{\pi}{3}$. نضع : $A_1 = r^{-1}(A)$ و $B_1 = r(B)$

(حيث r^{-1} هو الدوران العكسي للدوران r)

ليكن a_1 و b_1 لحقي A_1 و B_1 على التوالي .

1) تحقق أن المثلث OAB متساوي الأضلاع . — 0,50 ن

2) أ) بين أن : $a_1 = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$ و $b_1 = \left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$ — 0,50 ن

ب) بين أن الرباعي OA_1MB_1 متوازي أضلاع . — 0,50 ن

II 3 أ — نفترض أن $M \neq A$ و $M \neq B$ بين أن : $\dfrac{z-b_1}{z-a_1} = -\left(\dfrac{z-b}{z-a}\right) \times \dfrac{a}{b}$ — 0,50 ن

II 3 ب — بين أن النقط M و A_1 و B_1 مستقيمية إذا و فقط إذا كانت النقط M و O و A و B متداورة . — 0,75 ن

التمرين الثالث : (3 ن)

الهدف من التمرين هو البحث عن الأعداد الصحيحة الطبيعية n الأكبر قطعا من 1

و التي تحقق الخاصية $(\mathfrak{R})$ التالية : $(\mathfrak{R}) : \ 3^n - 2^n \equiv 0\ [n]$.

1 — نفترض أن n يحقق الخاصية $(\mathfrak{R})$. و ليكن p أصغر قاسم أولي موجب للعدد n .

1 أ — بين أن : $3^n - 2^n \equiv 0\ [p]$ ثم استنتج أن $p \geq 5$. — 0,75 ن

1 ب — بين أن : $2^{p-1} \equiv 1 [p]$ و $3^{p-1} \equiv 1 [p]$. — 0,50 ن

1 ج — بين أنه يوجد زوج (a,b) من $\mathbb{Z}^2$ بحيث : $an - b(p-1) = 1$. — 0,50 ن

1 د — ليكن r و q باقي و خارج القسمة الأقليدية للعدد a على $(p-1)$. — 0,50 ن

(يعني : $a = q(p-1) + r$ حيث : $0 \leq r < p-1$ و $q \epsilon \mathbb{Z}$)

بين أنه يوجد عدد صحيح طبيعي غير منعدم k بحيث : $rn = 1 + k(p-1)$.

2 — إستنتج من كل ما سبق أنه لا يوجد عدد صحيح طبيعي n أكبر قطعا من 1 و يحقق الخاصية $(\mathfrak{R})$. — 0,75 ن

التمرين الرابع : (10 ن)

الجزء الأول — نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $[1;+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} h(x) = \dfrac{x-1}{x\ln x} \ ; \ (\forall x > 1) \\ h(1) = 1 \end{cases}$$

1 أ — بين أن الدالة h متصلة على اليمين في 1 . — 0,25 ن

1 ب — بين أن : $(\forall x > 1) ; \ln x < x - 1$ ثم استنتج أن h تناقصية قطعا على المجال $]1;+\infty[$. — 0,75 ن

2 أ — أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة h . — 0,50 ن

2 ب — استنتج أن : $(\forall x \geq 1) \ ; \ 0 < h(x) \leq 1$. — 0,25 ن

الجزء الثاني — نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $[1;+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} g(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t}\ln t} dt \ ; \ (\forall x > 1) \\ g(1) = \ln 2 \end{cases}$$

و ليكن $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة g

في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1 أ — تحقق أن : $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t} dt = \ln 2 \ ; \ (\forall x > 1)$ — 0,25 ن

1 ب — تحقق أن : $(\forall x > 1) \ ; \ g(x) - \ln 2 = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\sqrt{t}-1}{t\ln t} dt$ — 0,25 ن

1 ج — بين أن : $(\forall x > 1) \ ; \ g(x) - \ln 2 = \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{x} \left(\frac{t-1}{t\ln t}\right) dt$ — 0,50 ن

2 أ — بين أن : $(\forall x > 1) \ ; \ (x - \sqrt{x})h(x) \leq g(x) - \ln 2 \leq (x - \sqrt{x})h(\sqrt{x})$ — 0,50 ن

0,50 ن		2	ب	استنتج أن الدالة g قابلة للإشتقاق على اليمين في 1 .
0,75 ن		2	ج	بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ و أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=0$
0,75 ن		3	أ	بين أن g قابلة للإشتقاق على المجال $]1;+\infty[$. و أن : $(\forall x>1)\ ;\ g'(x)=\frac{1}{2}h(\sqrt{x})$
0,50 ن		3	ب	استنتج أن : $(\forall x\geq 1)\ ;\ 0<g'(x)\leq\frac{1}{2}$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة g .
0,50 ن		3	ج	أنشئ المنحنى $(\mathscr{C})$.

الجزء الثالث

0,50 ن	I	1		بين أن الدالة : $k : x\longmapsto g(x)-x+1$ تقابل من $[1;+\infty[$ نحو $]-\infty;\ln 2]$.
0,25 ن	I	2		استنتج أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]1;+\infty[$ بحيث : $1+g(\alpha)=\alpha$.
	II			نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_{n+1}=1+g(u_n)\ ;\ (\forall n\geq 0)\\ 1\leq u_0<\alpha\end{cases}$
0,50 ن	II	1	أ	بين أن : $(\forall n\geq 0)\ ;\ 1\leq u_n<\alpha$
0,50 ن	II	1	ب	بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ تزايدية قطعا .
0,75 ن	II	1	ج	استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة . و أن : $\lim\limits_{n\infty} u_n=\alpha$
0,50 ن	II	2	أ	بين أن : $(\forall n\geq 0)\ ;\ \lvert u_{n+1}-\alpha\rvert\leq\dfrac{1}{2}\lvert u_n-\alpha\rvert$
0,50 ن	II	2	ب	بين أن : $(\forall n\geq 0)\ ;\ \lvert u_n-\alpha\rvert\leq\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\lvert u_0-\alpha\rvert$
0,25 ن	II	2	ج	استنتج مرة ثانية أن : $\lim\limits_{n\infty} u_n=\alpha$