

ليكن x و y عنصرين من $]0,1[$

إن: $0 < x < 1$ و $0 < y < 1$

إن: $-1 < -y < 0$ و $-1 < -x < 0$

إن: $0 < 1 - y < 1$ و $0 < 1 - x < 1$

و منه: $(1) \quad 0 < (1 - x)(1 - y) < 1$

و بما أن $xy > 0$ فإن: $(1 - x)(1 - y) + xy > xy$

(2) يعني: $\frac{xy}{(1 - x)(1 - y) + xy} < 1$

و لدينا: $xy > 0$ و $xy + (1 - x)(1 - y) > 0$

(3) إن: $\frac{xy}{(1 - x)(1 - y) + xy} > 0$

من (2) و (3) نستنتج أن:

$$(\forall (x, y) \in I^2) ; 0 < \frac{xy}{xy + (1 - x)(1 - y)} < 1$$

$$\Leftrightarrow (\forall (x, y) \in I^2) ; 0 < x * y < 1$$

$$\Leftrightarrow (\forall (x, y) \in I^2) ; x * y \in I$$

إن * قانون تركيب داخلي في I .

ليكن x و y عنصرين من I

$$\begin{aligned} \text{لدينا: } x * y &= \frac{xy}{xy + (1 - x)(1 - y)} \\ &= \frac{yx}{yx + (1 - y)(1 - x)} \\ &= y * x \end{aligned}$$

إن * قانون تبادلي في I .

لتكن x و y و z ثلاثة عناصر من I .

$$\begin{aligned} \text{لدينا: } x * (y * z) &= \frac{x(y * z)}{x(y * z) + (1 - x)(1 - (y * z))} \\ &= \frac{xyz}{xyz + (1 - x)(1 - y)(1 - z)} \end{aligned}$$

و بنفس الطريقة نحسب $z * (x * y)$ نحصل على:

$$(x * y) * z = \frac{xyz}{xyz + (1 - x)(1 - y)(1 - z)} = x * (y * z)$$

و بالتالي: * قانون تجميعي في I .

ليكن e العنصر المحايد للقانون * في I .

$$\Leftrightarrow (\forall x \in I) ; x * e = e * x = x$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in I) ; \frac{xe}{xe + (1 - x)(1 - e)} = x$$

نختزل بالعدد الغير المنعدم x نحصل على:

$$\Leftrightarrow (\forall x \in I) ; \frac{e}{xe + (1 - x)(1 - e)} = 1$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in I) ; xe + 1 - e - x + ex = e$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in I) ; e = \frac{1}{2} \in]0,1[$$

إن القانون * يقبل عنصرا محايدا في I و هو: $\frac{1}{2}$.

حصلنا لحد الآن على ما يلي:

- $I =]0,1[$ مجموعة غير فارغة
- * قانون تركيب داخلي في I .
- * يقبل $\frac{1}{2}$ كعنصر محايد في I .
- * تبادلي و تجميعي في I .

إن لكي تكون $(I, *)$ زمرة تبادلية يكفي أن نبين أن:

كل عنصر x يقبل مائلا بالقانون * في المجموعة I .

ليكن x' مائل x في المجموعة I بالنسبة للقانون *

$$\text{إن: } x * x' = x' * x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{xx'}{xx' + (1 - x)(1 - x')} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x' = (1 - x)$$

بما أن: $x \in I$ فإن $1 - x > 0$

إن: $1 - x > 0$

و منه $(1 - x)$ هو مائل x بالنسبة لـ * في I .

و بالتالي: $(I, *)$ زمرة تبادلية.

لدينا $H = \{2^n / n \in \mathbb{Z}\}$

إن: H جزء غير فارغ من $\mathbb{R}_+^*$

لأن: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 2^n \in \mathbb{R}_+^*$

ليكن 2^m و 2^n عنصرين من H

■ 2 (i)

نضع : $d = (x + 1) \wedge 18$ إذن حسب (Bezout) :

$$\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2 ; d = 18u + (x + 1)v$$

لدينا : $10^{x+1} \equiv 1[19]$ إذن : $(10^{x+1})^v \equiv 1^v[19]$

(1) يعني : $10^{(x+1)v} \equiv 1[19]$

و لدينا كذلك : $10^{18} \equiv 1[19]$ إذن : $10^{18u} \equiv 1^u[19]$

(2) يعني : $10^{18u} \equiv 1[19]$

نضرب المتوافقتين (1) و (2) طرفا بطرف نحصل على :

$$10^{18u} \times 10^{v(x+1)} \equiv 1[19]$$

يعني : $10^{18u+v(x+1)} \equiv 1[19]$

و بالتالي : $10^d \equiv 1[19]$

■ 2 (b)

لدينا : $d = 18 \wedge (x + 1)$

إذن : $d \setminus 18$

و منه : $d \in \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

$$\begin{cases} 10 \equiv 10[19] \\ 10^2 \equiv 5[19] \\ 10^3 \equiv 12[19] \\ 10^6 \equiv 11[19] \\ 10^9 \equiv 18[19] \\ 10^{18} \equiv 1[19] \end{cases} \text{ و لدينا :}$$

و بالتالي : $d = 18$

■ 2 (c)

لدينا : $18 = 18 \wedge (x + 1)$

إذن : $18 / (x + 1)$

و بما أن : $18 / (-18)$

فإن : $18 / (x + 1) - 18$

أي : $18 / (x - 17)$

و منه : $x \equiv 17[18]$

لدينا : $2^n \times (2^m)^{-1} = 2^{n-m} \in H$

إذن : $(H, \times)$ زمرة جزئية للزمرة $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.

■ 3 (b)

ليكن x و y عنصرين من H .

$$\begin{aligned} \varphi(x) * \varphi(y) &= \left(\frac{1}{1+x} \right) * \left(\frac{1}{1+y} \right) \\ &= \frac{1}{(1+x)(1+y)} \\ &= \frac{1}{(1+x)(1+y) + \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) \left(1 - \frac{1}{1+y}\right)} \\ &= \frac{1}{(1+x)(1+y)} \times \frac{(1+x)(1+y)}{1+xy} \\ &= \frac{1}{1+xy} = \varphi(xy) \end{aligned}$$

إذن φ تشاكل من $(H, \times)$ نحو $(I, *)$.

■ 3 (c)

ليكن 2^n عنصرا من H .

$$\varphi(2^n) = \frac{1}{1+2^n} \in K$$

$$\Leftrightarrow \varphi(H) = K$$

لدينا : φ تشاكل من $(H, \times)$ نحو $(I, *)$.

و نعلم أن التشاكل يحافظ على بنية الزمرة.

و لدينا كذلك $(H, \times)$ زمرة جزئية لـ $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ حسب السؤال (3) (i)

إذن $(\varphi(H), \times)$ زمرة جزئية للزمرة $(I, *)$

و بالتالي : $(K, *)$ زمرة جزئية للزمرة $(I, *)$.

التمرين الثاني : (2,5 ن)

■ 1 (i)

لدينا : $10^x \equiv 2[19]$

نضرب طرفي هذه المتوافقة في العدد 10 نجد : $10^{x+1} \equiv 20[19]$

من جهة أخرى لدينا : $20 \equiv 1[19]$

إذن : $10^{x+1} \equiv 1[19]$

■ 1 (b)

لدينا 19 عدد أولي.

إذن حسب مبرهنة (Fermat) :

$$(\forall a \wedge 19 = 1) ; a^{19-1} \equiv 1[19]$$

من أجل $a = 10$ لدينا $10 \wedge 19 = 1$ إذن : $10^{19-1} \equiv 1[19]$

أي : $10^{18} \equiv 1[19]$

1 ■

تعويض سهل يمنحك نصف نقطة مجانية.

2 ■

ننشر التعبير : $(z + 2i)(z^2 + \alpha z + \beta)$ نحصل على :

$$(z + 2i)(z^2 + \alpha z + \beta) = z^3 + (\alpha + 2i)z^2 + (\beta + 2i\alpha)z + 2i\beta$$

و منه نستنتج حسب مبدأ مقابلة معاملات الحدود من نفس الدرجة أن :

$$\begin{cases} 2i\beta = -10(1 + i) \\ \alpha + 2i = -(1 + 2i) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -(1 + 4i) \\ \beta = 5i - 5 \end{cases}$$

3 ■

ليكن $(x + iy)$ جذرا مربعا للعدد العقدي $(5 - 12i)$.

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & \begin{cases} (x + iy)^2 = 5 - 12i \\ |x + iy| = \sqrt{5^2 + 12^2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} (x^2 - y^2) + 2ixy = 5 - 12i \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} (x^2 - y^2) = 5 \\ xy = -6 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x^2 = 9 \\ y^2 = 4 \\ xy = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \text{ أو } x = 3 \\ y = 2 \text{ أو } y = -2 \end{cases} \end{aligned}$$



إذن الجذران المربعان للعدد العقدي $5 - 12i$ هما : $(3 - 2i)$ و $(-3 + 2i)$

3 ■

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية :

$$(z + 2i)(z^2 - (1 + 4i)z - 5 + 5i) = 0$$

يجب إذن حل المعادلة التالية أولا : $z^2 - (1 + 4i)z - 5 + 5i = 0$

$$\begin{aligned} \Delta &= (1 + 4i)^2 - 4(-5 + 5i) \\ &= 5 - 12i \\ &= (3 - 2i)^2 \end{aligned}$$

إذن : $z_1 = -1 + 3i$ و $z_2 = 2 + i$

و بالتالي : المعادلة (E) تقبل ثلاث حلول مختلفة و هي :

$$-1 + 3i \text{ و } 2 + i \text{ و } -2i$$

1 ■

$$\frac{a - c}{b - c} = \frac{-1 + 3i - 2 - i}{-2i - 2 - i} = \frac{3 - 2i}{2 + 3i} = -i = e^{-\frac{i\pi}{2}}$$

و منه :

$$(1) \quad \left(\overline{CB}, \overline{CA} \right) \equiv \frac{-\pi}{2} [2\pi]$$

$$\left| \frac{a - c}{b - c} \right| = |-i| = 1 \quad \text{و لدينا كذلك :}$$

$$(2) \quad \frac{CA}{CB} = 1 \quad \text{إذن :}$$

من (1) و (2) نستنتج أن المثلث ABC مثلث قائم الزاوية و متساوي الساقين في C .

2 ■

نضع : $M(z)$ و $M_1(z_1)$ و $M_2(z_2)$

$$\mathcal{R}_1(M) = M_1 \quad \text{لدينا :}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & (z_1 - b) = e^{\frac{i\pi}{3}}(z - b) \\ \Leftrightarrow & (z_1 + 2i) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) (z + 2i) \\ \Leftrightarrow & z_1 = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \right) z - \sqrt{3} - i \end{aligned}$$

2 ■

$$\mathcal{R}_2(M) = M_2 \quad \text{لدينا :}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & (z_2 - a) = e^{-\frac{2i\pi}{3}}(z - a) \\ \Leftrightarrow & (z_2 + 1 - 3i) = \left(\frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) (z + 1 - 3i) \\ \Leftrightarrow & z_2 = -\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \right) z - (1 - 3i) \left(\frac{3 + i\sqrt{3}}{2} \right) \end{aligned}$$

2 ■

لدينا I هي منتصف القطعة $[M_1M_2]$.

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & aff(I) = \frac{z_1 + z_2}{2} \\ \Leftrightarrow & aff(I) = -\sqrt{3} - i - \frac{(1 - 3i)(3 + i\sqrt{3})}{2} \\ \Leftrightarrow & aff(I) = \text{constante complexe} \end{aligned}$$

إذن $aff(I)$ عدد عقدي ثابت.

أي : I نقطة ثابتة في المستوى.



1 ■

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = +\infty$$

2 (i) ■

ليكن x عنصرا من $]0, +\infty[$

لدينا f قابلة للإشتقاق على $]0, +\infty[$ لأنها مجموع دالتين

قابلتين للإشتقاق على $]0, +\infty[$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0 \quad \text{و لدينا :}$$

إن f دالة تزايدية قطعاً على $]0, +\infty[$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
f	$-\infty$	$+\infty$

2 (ب) ■

لدينا f دالة متصلة و تزايدية قطعاً على $]0, +\infty[$

إن f تقابل من $]0, +\infty[$ نحو صورته $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

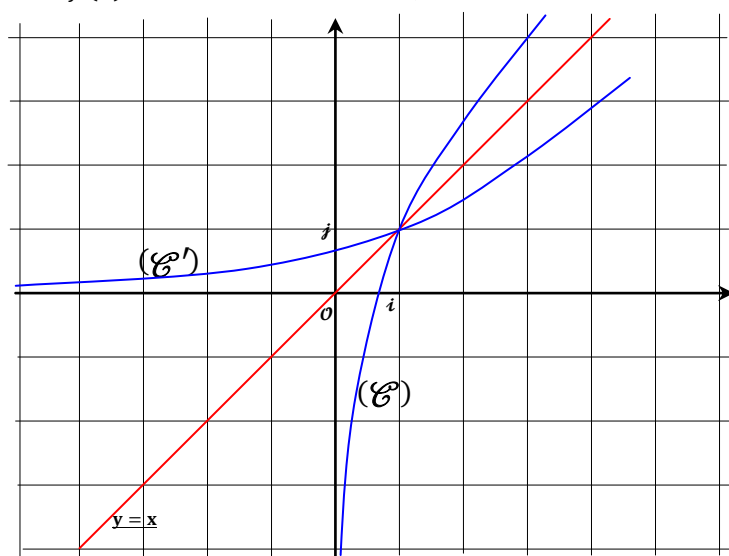
و تقابله العكسي f^{-1} دالة متصلة و تزايدية قطعاً على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
f^{-1}		$+\infty$
	0	

3 ■

$$f(1) = 1 + \ln 1 = 1$$

$$f(e) = e + \ln e = e + 1 \approx 3,72$$



4 (i) ■

$$\int_1^{e+1} f^{-1}(x) dx \quad \text{لنحسب التكامل :}$$

من أجل ذلك نضع : $t = f^{-1}(x)$ إذن : $x = f(t)$

$$\frac{dx}{dt} = f'(t) \quad \text{و منه :}$$

$$\int_1^{e+1} f^{-1}(x) dx = \int_1^e t f'(t) dt \quad \text{إذن :}$$

$$= [t f(t)]_1^e - \int_1^e f(t) dt$$

$$= [t f(t)]_1^e - \left[\frac{t^2}{2} + t \ln t - t \right]_1^e$$

$$= e^2 + e - 1 - \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{e^2 + 2e - 3}{2} \approx 4,9$$

4 (ب) ■

نضع A هي مساحة الحيز المذكور في السؤال إذن :

$$A = \int_1^{e+1} |x - f^{-1}(x)| dx$$

$$\Leftrightarrow A = \int_1^{e+1} x dx - \int_1^{e+1} f^{-1}(x) dx$$

$$\Leftrightarrow A = \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^{e+1} - \left(\frac{e^2 + 2e - 3}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow A = \left(\frac{e^2 + 2e}{2} \right) - \left(\frac{e^2 + 2e - 3}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{3}{2}$$



نضع : $h(x) = x + \ln x - n$

لدينا h دالة متصلة وقابلة للإشتقاق على $]0, +\infty[$

و لدينا كذلك : $h'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$

إذن h دالة تزايدية قطعاً على المجال $]0, +\infty[$

و منه h تقابل من $]0, +\infty[$ نحو صورته $]-\infty, +\infty[$

و بما أن : $0 \in]-\infty, +\infty[$ فإنه يمتلك سابقاً واحداً x_n بالتقابل h .

يعني : $\exists! x_n \in]0, +\infty[; h(x_n) = 0$

بتعبير آخر : $\exists! x_n \in]0, +\infty[; x_n + \ln(x_n) = n$

x_1 هو حل المعادلة : $x + \ln x = 1$

إذن : $x_1 = 1$

و لدينا : $f(x_n) = n$ إذن : $x_n = f^{-1}(n)$

و بما أن : f^{-1} دالة تزايدية قطعاً فإن :

$x_{n+1} = f^{-1}(n+1) > f^{-1}(n) = x_n$

(1)

إذن من النتيجة $x_{n+1} > x_n$ نستنتج أن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية تزايدية قطعاً.

نفترض أن المتتالية $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ مكبورة بعدد حقيقي A

إذن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; x_n \leq A$

$\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) : f(x_n) \leq f(A) = B$

$\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) : n \leq B$

$\Leftrightarrow$ المجموعة $\mathbb{N}$ مكبورة بالعدد B

$\Leftrightarrow$ مستحيل

إذن : $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ غير مكبورة (2)

من (1) و (2) نستنتج أن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية متباعدة.

أي : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$

$\Leftrightarrow n \geq 1$

$\Leftrightarrow \ln n \geq 0$

$\Leftrightarrow n + \ln n \geq n$

$\Leftrightarrow f(n) \geq f(x_n)$

إذن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; f(n) \geq f(x_n)$

و بما أن f^{-1} دالة تزايدية فإن : $f^{-1}(f(n)) \geq f^{-1}(f(x_n))$

و بالتالي : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; n \geq x_n$

لدينا : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; n \geq x_n$

$\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \frac{x_n}{n} \leq 1$

$\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \ln\left(\frac{x_n}{n}\right) \leq 0$

$\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \ln(x_n) - \ln(n) \leq 0$

$\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \underbrace{x_n + \ln(x_n)}_n - \ln(n) \leq x_n$

$\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; n - \ln(n) \leq x_n$

ملاحظة :

لدينا :

$\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \ln n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{\ln n}{n}\right) = (+\infty)(1 - 0) = +\infty$

إذن : $\underbrace{n - \ln(n)}_{+\infty} \leq x_n$

و هذا دليل آخر على أن : $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$

لدينا : $n - \ln n \leq x_n$

إذن : $\frac{n - x_n}{n} \leq \frac{\ln n}{n}$

و منه : $\left| \frac{n - x_n}{n} \right| \leq \frac{\ln n}{n}$

و بما أن : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln n}{n}\right) = 0$

فإن : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n - x_n}{n} \right| = 0$

أي : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n - n}{n}\right) = 0$

و لدينا حسب السؤالين (i) و (ii) : $n - \ln n \leq x_n \leq n$

إذن : $\frac{n - \ln n}{n - \ln n} \leq \frac{x_n}{n - \ln n} \leq \frac{n}{n - \ln n}$

يعني : $1 \leq \frac{x_n}{n - \ln n} \leq \frac{n}{n - \ln n}$

و بما أن : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n - \ln n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 - \frac{\ln n}{n}}\right) = 1$

فإن : $\underbrace{1}_{1} \leq \frac{x_n}{n - \ln n} \leq \underbrace{\frac{n}{n - \ln n}}_{1}$

و بالتالي : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{n - \ln n}\right) = 1$



لدينا دالة متصلة وقابلة للإشتقاق على $]0,1[$.

ولدينا : $\forall x \in]0,1[; f'_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} > 0$

إذن : دالة f_n تزايدية قطعاً على $]0,1[$

و منه f_n تقابل من $]0,1[$ نحو $]f_n(0), f_n(1)[$

لدينا : $f_n(0) = -1 < 0$

و $f_n(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > 0$

إذن : $0 \in]f_n(0), f_n(1)[$

و منه : 0 يمتلك سابقاً واحداً α_n بالتقابل f_n

يعني : $\exists ! \alpha_n \in]0,1[; f_n(\alpha_n) = 0$

لدينا : $f_{n+1}(x) = -1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \frac{x^{n+1}}{n+1}$

$$\Leftrightarrow f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

و بما أن : $x \in]0,1[$ فإن : $\frac{x^{n+1}}{n+1} > 0$

و منه : $\forall x \in]0,1[; f_{n+1}(x) > f_n(x)$

و لدينا كذلك : $\alpha_{n+1} \in]0,1[$ إذن : $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) > f_n(\alpha_{n+1})$

و نعلم أن : $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = f_n(\alpha_n) = 0$

إذن : $f_n(\alpha_n) > f_n(\alpha_{n+1})$

و بما أن f_n دالة تزايدية قطعاً على $]0,1[$ فإن : $\alpha_n > \alpha_{n+1}$

إذن $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ متتالية تناقصية قطعاً.

ولدينا : $0 < \alpha_n < 1$; $(\forall n \geq 2)$

يعني أن المتتالية $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ مصغورة بالعدد 0

و بالتالي : $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ متتالية متقاربة .

لدينا $(t^n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها العدد الحقيقي t المخالف لـ 1 .

إذن : $1 + t + \dots + t^{n-1} = \frac{1-t^n}{1-t} = \frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t}$

لدينا من أجل : $t \neq 1$

$$1 + t + \dots + t^{n-1} = \frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t}$$

إذن :

$$\int_0^{\alpha_n} (1 + t + \dots + t^{n-1}) dt = \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t} \right) dt$$

$$\Leftrightarrow \alpha_n + \frac{\alpha_n^2}{2} + \dots + \frac{\alpha_n^n}{n} = -\ln(1 - \alpha_n) - \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t} \right) dt$$

$$\alpha_n + \frac{\alpha_n^2}{2} + \dots + \frac{\alpha_n^n}{n} = -\ln(1 - \alpha_n) - \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t} \right) dt$$

و نعلم أن : $f_n(\alpha_n) = 0$

$$-1 + \alpha_n + \frac{\alpha_n^2}{2} + \dots + \frac{\alpha_n^n}{n} = 0 \quad \text{يعني :}$$

$$1 = -\ln(1 - \alpha_n) - \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t} \right) dt \quad \text{إذن :}$$

$$1 + \ln(1 - \alpha_n) = - \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t} \right) dt \quad \text{و منه :}$$

ننطلق من الكتابة : $0 \leq t \leq \alpha_n$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 1 - \alpha_n \leq 1 - t$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1 - \alpha_n} \geq \frac{1}{1 - t} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{t^n}{1 - t} \leq \frac{t^n}{1 - \alpha_n}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t} \right) dt \leq \frac{1}{(1 - \alpha_n)} \int_0^{\alpha_n} t^n dt$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t} \right) dt \leq \left(\frac{1}{1 - \alpha_n} \right) \left(\frac{\alpha_n^{n+1}}{n+1} \right)$$

و بما أن : $\alpha_n^{n+1} < 1$

$$\left(\frac{1}{1 - \alpha_n} \right) \left(\frac{\alpha_n^{n+1}}{n+1} \right) \leq \left(\frac{1}{1 - \alpha_n} \right) \left(\frac{1}{n+1} \right) \quad \text{فإن :}$$

و بالتالي :

$$(\forall n \geq 2) ; 0 \leq \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t} \right) dt \leq \left(\frac{1}{1 - \alpha_n} \right) \left(\frac{1}{n+1} \right)$$





لدينا :

$$0 \leq \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t} \right) dt \leq \underbrace{\left(\frac{1}{1-\alpha_n} \right)}_{+\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{n+1} \right)}_{+\infty}$$

$\swarrow$ $\searrow$
 0 0

إذن :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t} \right) dt = 0$$

و منه :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \ln(1 - \alpha_n)) = 0$$

نضع :

$$\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$$

إذن :

$$1 + \ln(1 - \ell) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(1 - \ell) = -1$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{1 - \ell}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1 - \ell} = e$$

$$\Leftrightarrow e(1 - \ell) = 1$$

$$\Leftrightarrow e - e\ell = 1$$

$$\Leftrightarrow \ell = \frac{e - 1}{e}$$

$$\Leftrightarrow \ell = 1 - e^{-1}$$

و الحمد لله رب العالمين ■

