المملكة المغربية

وزارة التربية الوطنية و التعليم العالي و تكوين الأطر و البحث العلمي

المركز الوطني للتقويم و الإمتحانات

الإمتحان الوطني الموحد

لنيل شهادة البكالوريا

الدورة العادية 2009

مادة الرياضيات

مسلك العلوم الرياضية أ و ب

المعامل 9

مدة الإنجاز : أربع ساعات

استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (4,5 ن)

$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ هي مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2.

نذكر أن : $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية وحدتها $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

لتكن $\mathcal{F}$ مجموعة المصفوفات (x,y) من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ بحيث $M(x,y)=\begin{pmatrix}x&y\\0&\frac{1}{x}\end{pmatrix}$ مع $(x,y)\epsilon\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$.

0,25 ن — 1) أ) بين أن $\mathcal{F}$ جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

0,50 ن — ب) بين أن $(\mathcal{F},\times)$ زمرة غير تبادلية .

1,00 ن — 2) لتكن G مجموعة المصفوفات $M(x,0)$ من $\mathcal{F}$ حيث $x\epsilon\mathbb{R}^*$

بين أن G زمرة جزئية للزمرة $(\mathcal{F},\times)$.

0,50 ن — 3) ليكن $E=\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$.

نزود المجموعة E بقانون التركيب الداخلي $\perp$ المعرف بما يلي :

$$(\forall(x,y)\epsilon E)\ ;\ (\forall(a,b)\epsilon E)\ :\ (x,y)\perp(a,b)=\left(ax\,,bx+\frac{y}{a}\right)$$

نعتبر التطبيق :

$$\varphi\ :\ (\mathcal{F},\times)\to(E,\perp)$$
$$M(x,y)\to\varphi\big(M(x,y)\big)=(x,y)$$

0,25 ن — أ) أحسب : $(2,3)\perp(1,1)$ و $(1,1)\perp(2,3)$.

0,50 ن — ب) بين أن φ تشاكل تقابلي .

0,50 ن — ج) استنتج بنية $(E,\perp)$.

التمرين الثاني : (4,0 ن)

m عدد عقدي يخالف 1 .

(I) نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z . $(E)\ :\ z^2-(1-i)(m+1)z-i(m^2+1)=0$

0,25 ن — 1) أ) تحقق أن مميز المعادلة (E) هو : $\Delta=\ [(1+i)(m-1)]^2$.

0,25 ن — ب) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .

ج) حدد على الشكل الجبري قيمتي العدد العقدي m لكي يكون جداء حلي المعادلة (E) يساوي 1	0,50 ن
2) نضع $z_1 = 1 - im$ و $z_2 = m - i$.	1,00 ن
(II) في حالة $m = e^{i\theta}$ و $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ ، أكتب z_1 و z_2 على الشكل المثلثي .	
المستوى العقدي $(\mathcal{P})$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.	
نعتبر النقط M و M_1 و M_2 التي ألحاقها على التوالي هي : m و $z_1 = 1 - im$ و $z_2 = m - i$.	
1) حدد مجموعة النقط M بحيث تكون النقط M و M_1 و M_2 نقط مستقيمية.	0,50 ن
2) أ) بين أن التحويل $\mathcal{R}$ الذي يربط كل نقطة M لحقها z بالنقطة M' التي لحقها $z' = 1 - iz$ هو دوران ينبغي تحديد لحق مركزه Ω و قياسا لزاويته.	0,50 ن
ب) بين أن العدد العقدي : $\frac{z_2 - z_1}{z_2 - m}$ تخيلي صرف إذا و فقط إذا كان : $\Re e(m) + \Im m(m) = 1$ ($\Re e(m)$ هو الجزء الحقيقي للعدد m و $\Im m(m)$ هو جزءه التخيلي)	0,50 ن
ج) استنتج مجموعة النقط M بحيث تكون النقط Ω و M و M_1 و M_2 متداورة .	0,50 ن
التمرين الثالث : (3,0 ن) لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع : $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$.	
1) أ) تحقق أن a_n عدد زوجي لكل n من $\mathbb{N}^*$.	0,25 ن
ب) حدد قيم n التي يكون من أجلها $a_n \equiv 0[3]$.	0,50 ن
2) ليكن p عددا أوليا بحيث $p > 3$.	
أ) بين أن : $2^{p-1} \equiv 1[p]$ و $3^{p-1} \equiv 1[p]$ و $6^{p-1} \equiv 1[p]$.	0,75 ن
ب) بين أن p يقسم a_{p-2} .	0,75 ن
ج) بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي أولي q يوجد عدد صحيح طبيعي غير منعدم n بحيث $a_n \wedge q = q$. ($a_n \wedge q$ هو القاسم المشترك الأكبر للعددين a_n و q .)	0,50 ن
التمرين الرابع : (10 ن) n عدد صحيح طبيعي غير منعدم .	
نعتبر الدالة العددية f_n للمتغير الحقيقي x المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي . $(\forall x > 0)\ ;\ f_n(x) = x(1 - \ln x)^n$ و $f_n(0) = 0$	
(I) ليكن $(\mathscr{C}_n)$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.	
1) أ) بين أن الدالة f_n متصلة على اليمين في 0 (يمكن وضع $x = t^n$).	0,50 ن
ب) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f_n على اليمين في 0 .	0,25 ن
ج) حدد النهايات التالية : $\lim_{x \to +\infty} f_1(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} f_2(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} \frac{f_1(x)}{x}$ و $\lim_{x \to +\infty} \frac{f_2(x)}{x}$	1,00 ن

② أ) أدرس تغيرات الدالة f_1 .	0,50 ن
ب) أدرس تغيرات الدالة f_2 .	0,50 ن
③ أ) أدرس الوضع النسبي للمنحنيين $(\mathscr{C}_1)$ و $(\mathscr{C}_2)$.	0,25 ن
ب) أنشئ المنحنيين $(\mathscr{C}_1)$ و $(\mathscr{C}_2)$ (نقبل $A(1,1)$ نقطة انعطاف للمنحنى $(\mathscr{C}_2)$) نأخذ : $\Vert\vec{i}\Vert = \Vert\vec{j}\Vert = 2cm$	0,50 ن
(II) نعتبر الدالة العددية F للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-\infty,0]$ بما يلي : $F(x)=\int_{e^x}^{1}\frac{f_1(t)}{1+t^2}dt$	
① أ) بين أن الدالة F قابلة للإشتقاق على المجال $]-\infty,0[$. وأن : $(\forall x<0)\ ;\ F'(x)=\frac{(x-1)e^{2x}}{(1+e^{2x})}$	0,50 ن
ب) استنتج منحنى تغيرات الدالة F على المجال : $]-\infty,0]$	0,25 ن
② أ) بين أن : $(\forall x<0)\ ;\ \frac{1}{2}\int_{e^x}^{1}f_1(t)\,dt\le F(x)\le\frac{1}{1+e^{2x}}\int_{e^x}^{1}f_1(t)\,dt$	0,25 ن
ب) تحقق أن الدالة : $x\to x^2\left(\frac{3}{4}-\frac{\ln x}{2}\right)$ هي دالة أصلية للدالة f_1 على المجال $]0,+\infty[$.	0,25 ن
ج) بين أن : $\lim_{x\to-\infty}\int_{e^x}^{1}f_1(t)\,dt=\frac{3}{4}$	0,25 ن
③ نفترض أن الدالة F تقبل نهاية منتهية ℓ عندما يؤول x إلى $-\infty$. بين أن : $\frac{3}{8}\le\ell\le\frac{3}{4}$	0,25 ن
(III) لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع : $u_n=\int_{1}^{e}f_n(x)dx$	
① أ) بين أن : $(\forall n\ge1)\ ;\ u_n\ge0$.	0,50 ن
ب) حدد إشارة $f_{n+1}(x)-f_n(x)$ على المجال $[1,e]$.	0,50 ن
ج) بين أن : $(\forall n\ge1)\ ;\ u_{n+1}\le u_n$.	0,25 ن
د) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ متقاربة .	0,25 ن
② أ) بين أن : $(\forall n\ge1)\ ;\ u_{n+1}=\frac{-1}{2}+\frac{(n+1)}{2}u_n$	0,50 ن
ب) استنتج بـ cm^2 مساحة حيز المستوى المحصور بين $(\mathscr{C}_1)$ و $(\mathscr{C}_2)$ و المستقيمين $x=1$ و $x=e$.	0,50 ن
③ أ) بين أن : $(\forall n\ge2)\ ;\ \frac{1}{(n+1)}\le u_n\le\frac{1}{(n-1)}$	0,75 ن
ب) حدد : $\lim_{x\to+\infty}u_n$ و $\lim_{x\to+\infty}nu_n$	0,50 ن
④ a عدد حقيقي مخالف للعدد u_1 . نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\ge1}$ المعرفة بما يلي : $v_1=a$ و $(\forall n\ge1)\ ;\ v_{n+1}=\frac{-1}{2}+\frac{(n+1)}{2}v_n$ و لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع : $d_n=\vert v_n-u_n\vert$.	
أ) بين أن : $(\forall n\ge1)\ ;\ d_n=\frac{n!}{2^{(n-1)}}d_1$	0,25 ن
ب) بين أن : $(\forall n\ge2)\ ;\ \frac{n!}{2}\ge3^{n-2}$	0,25 ن
ج) بين أن : $\lim_{n\to+\infty}d_n=+\infty$	0,25 ن
د) استنتج أن المتتالية $(v_n)_{n\ge1}$ متباعدة.	0,25 ن