



استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

**التمرين الأول : ( 4,5 ن )**

(I) ليكن  $E = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$ . لكل زوج  $(a, b)$  من  $E^2$  نضع :  $a \perp b = a + b - ab\sqrt{2}$

① ① تحقق أن لكل زوج  $(a, b)$  من  $\mathbb{E}^2$  :  $a \perp b = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}(a\sqrt{2} - 1)(b\sqrt{2} - 1)$  ن 0,25

② ② استنتج ان  $\perp$  قانون تركيب داخلي في  $E$ . ن 0,25

③ ② بين أن  $(E, \perp)$  زمرة تبادلية . ن 0,50

(II)  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  هي مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2 .

نذكر أن :  $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$  حلقة واحدية وحدتها :  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

و نذكر أن :  $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$  فضاء متجهي حقيقي .

لتكن  $F$  مجموعة المصفوفات من  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  التي نكتب على الشكل :  $a \in E$  :  $M(a) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} - a & a \\ a & \sqrt{2} - a \end{pmatrix}$

① ① نضع :  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  تحقق أن :  $A^2 = -2A$  و أن :  $M(a) = 1 + \frac{a}{\sqrt{2}}A$  ن 0,50

② ② بين أن  $F$  جزء مستقر من :  $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$  ن 0,50

③ ② نعتبر التطبيق :  $\varphi : (E, \perp) \longrightarrow (F, \times)$   
 $a \longrightarrow \varphi(a) = M(a)$

④ ① بين أن التطبيق  $\varphi$  تشاكل تقابلي . ن 0,50

⑤ ② استنتج بنية  $(F, \times)$  . ن 0,50

**التمرين الثاني : ( 3,5 ن )**

ليكن  $a$  عددا عقديا مخالفا للعددين  $i$  و  $-i$

(I) ① ① تحقق أن العدد العقدي  $u = a + i$  حل للمعادلة  $z^2 - (1 + a)(1 + i)z + (1 + a^2)i = 0$  :  $(E)$  . ن 0,25

② ② حدد  $v$  الحل الثاني للمعادلة  $(E)$  . ن 0,25

③ ② نفترض أن  $|a| = 1$  .

④ ① بين أن :  $\frac{u}{v} \in \mathbb{R}$  ن 0,25

⑤ ② تحقق أن :  $u^2 = a[(a - \bar{a}) + 2i]$  ن 0,25

⑥ ③ استنتج أن :  $\arg(u) = \frac{1}{2} \arg(a) + \frac{\pi}{4} [\pi]$  ن 0,50

⑦ ③ بين أن  $|u| + |v| \geq 2$  ن 0,50

(II) المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  .

ليكن  $m$  عددا حقيقيا أكبر قطعا من 2 . و  $(E_m)$  مجموعة النقط  $M(a)$  من المستوى العقدي بحيث :

$$|u| + |v| = m$$

① بين أن  $(E_m)$  إهليلج مركزه أصل المعلم  $O$  .

ن 0,50

② نضع :  $a = x + iy$  حيث  $x$  و  $y$  عدنان حقيقيان .

① بين أن :  $x^2 + \left(1 - \frac{4}{m^2}\right)y^2 = \frac{m^2}{4} - 1$  معادلة ديكارتية للإهليلج  $(E_m)$  .

ن 0,25

② أنشئ الإهليلج  $(E_4)$  .

ن 0,25

③ نعتبر النقطتين  $A(\sqrt{3})$  و  $B(2i)$  رأسَي الإهليلج  $(E_4)$  . بين أن المستقيم  $(AB)$  مماس للإهليلج  $(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}})$  .

ن 0,50

**التمرين الثالث : (3,0 ن)** نعتبر المعادلة :  $195x - 232y = 1$  :  $(E)$  .

① ① حدد  $195 \wedge 132$  .

ن 0,50

② بين أن مجموعة حلول المعادلة  $(E)$  هي :  $S = \{(163 + 232k ; 137 + 195k) ; k \in \mathbb{Z}\}$  .

ن 0,50

③ أوجد العدد الصحيح الطبيعي  $d$  الوحيد الذي يحقق :  $0 \leq d \leq 232$  و  $195d \equiv 1[232]$  .

ن 0,25

② بين أن العدد 233 عدد أولي.

ن 0,25

③ لتكن  $A$  مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية المحصورة بين 0 و 232 . نعتبر التطبيق  $f$  من  $A$  نحو  $A$  المعروف بما يلي :

مهما يكن  $a$  من  $A$  فإن  $f(a)$  هو باقي القسمة الإقليدية للعدد  $a^{195}$  على 233.

قبل أن :  $\forall a \in A \setminus \{0\} : a^{232} \equiv 1[233]$  .

① بين أن لكل عنصرين  $a$  و  $b$  من المجموعة  $A$  ، إذا كان  $f(a) = f(b)$  فإن  $a = b$  .

ن 0,50

② ليكن  $a$  و  $b$  عنصرين من المجموعة  $A$  بحيث  $f(a) = b$  . حدد  $a$  بدلالة  $b$  .

ن 0,50

③ استنتج أن التطبيق  $f$  تقابل ثم حدد تقابله العكسي  $f^{-1}$  .

ن 0,50

**التمرين الرابع : (10,5 ن)** نعتبر الدالة العددية  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي :  $g(x) = 1 + (x - 1)e^x$  .

① (I) بين أن لكل  $x$  من  $\mathbb{R} : g(x) \geq 0$  .

ن 0,50

② بين أن  $x = 0$  هو الحل الوحيد للمعادلة :  $g(x) = 0$  .

ن 0,25

(II) لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{e^x + 1} ; \forall x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

و ليكن  $(\mathcal{C})$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في معلم متعامد ممنظم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  .

① أحسب النهايتين :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x)$  .

ن 0,50

② بين أن الدالة  $f$  متصلة في 0 .

ن 0,25

③ ① أحسب  $f'(x)$  من أجل كل عنصر  $x$  من  $\mathbb{R}^*$  .

ن 0,50

② استنتج تغيرات الدالة  $f$  .

ن 0,25

④ نعتبر التكامل :  $J(x) = \int_0^x te^{-t} dt$  حيث  $x$  عدد حقيقي .

① باستعمال المكاملة بالأجزاء بين أن :  $J(x) = e^{-x}(e^x - 1 - x)$  .

ن 0,50

② بين أن لكل  $x$  من  $\mathbb{R} : \frac{x^2}{2} e^{-\frac{(x+|x|)}{2}} \leq J(x) \leq \frac{x^2}{2} e^{-\frac{(x-|x|)}{2}}$  .

ن 1,00

Ⓒ 0,50 ن بين أن لكل  $x$  من  $\mathbb{R}^*$  :  $\frac{1}{2}e^{\frac{x-|x|}{2}} \leq \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \leq \frac{1}{2}e^{\frac{x+|x|}{2}}$

Ⓓ 0,75 ن استنتج أن الدالة  $f$  قابلة للإشتقاق في 0 وأن  $f'(0) = \frac{-1}{2}$ .

Ⓔ 0,50 ن Ⓔ Ⓐ بين أن لكل  $x$  من  $\mathbb{R}^*$  :  $f''(x) = \frac{e^x}{(e^x - 1)}(e^x(x - 1) + 2 + x)$

Ⓔ 0,50 ن Ⓔ Ⓑ أدرس إشارة  $e^x(x - 2) + 2 + x$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$ .

Ⓔ 0,25 ن Ⓔ Ⓒ استنتج أن لكل  $x$  من  $\mathbb{R}^*$  :  $f''(x) > 0$ .

Ⓔ 0,50 ن Ⓔ Ⓓ أنشئ (Ⓔ)

(III) نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة بما يلي :  $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) ; \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}$

Ⓔ 0,25 ن Ⓔ ① بين أن  $x = \ln 2$  هو الحل الوحيد للمعادلة  $f(x) = x$

Ⓔ 0,50 ن Ⓔ ② Ⓐ بين أن لكل  $x$  من  $\mathbb{R}^*$  :  $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ .

Ⓔ 0,50 ن Ⓔ Ⓑ بين أن لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$  :  $|u_{n+1} - \ln 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ln 2|$

Ⓔ 0,50 ن Ⓔ Ⓒ استنتج أن المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متقاربة و حدد نهايتها.

(IV) لتكن  $F$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي :  $\begin{cases} F(x) = \int_x^{2x} \frac{t}{e^t - 1} dt ; \forall x \neq 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$

Ⓔ 0,50 ن Ⓔ ① Ⓐ بين أن لكل  $x$  من  $\mathbb{R}^*$  :  $\frac{2x^2}{e^{2x} - 1} \leq F(x) \leq \frac{x^2}{e^x - 1}$

Ⓔ 0,25 ن Ⓔ Ⓑ بين أن الدالة  $F$  متصلة في 0.

Ⓔ 0,50 ن Ⓔ Ⓒ بين أن الدالة  $F$  قابلة للإشتقاق في 0 وأن :  $F'(0) = 1$ .

Ⓔ 0,50 ن Ⓔ ② Ⓐ بين أن الدالة  $F$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}^*$  وأن لكل  $x$  من  $\mathbb{R}^*$  :  $F'(x) = \frac{3 - e^x}{e^x + 1} f(x)$

Ⓔ 0,25 ن Ⓔ Ⓑ أدرس تغيرات الدالة  $F$ .