استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (2,0 ن)

نوزع بطريقة عشوائية أربع كرات غير قابلة للتمييز باللمس و مرقمة 1 و 2 و 3 و 4 على ستة أشخاص A و B و C و D و E و F ،(كل شخص يمكنه أن يحصل على 0 أو 1 أو 2 أو 3 أو 4 كرات)

0,50 ن — ① ما هو عدد إمكانيات توزيع الكرات الأربع على الأشخاص الستة ؟

0,50 ن — ② أحسب احتمال أن يحصل الشخص A على كرة واحدة على الأقل .

1,00 ن — ③ أحسب احتمال الحدث التالي : " مجموع عددي الكرات المحصل عليها من طرف الشخصين B و C يساوي عدد الكرات المحصل عليها من طرف الشخص A .

التمرين الثاني : (4,0 ن)

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر التطبيق f المعرف من $\mathbb{C}$ نحو $\mathbb{C}$ بما يلي :

$$f(z)=\frac{1}{6}\left((1+i\sqrt{3})z+2\bar{z}\right)$$

0,50 ن — **(I)** حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $f(z)=0$.

(II) نضع $z_0=1$ و $z_{n+1}=f(z_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$ و نرمز بـ u_n لمعيار العدد العقدي z_n .

0,50 ن — ① (أ) بين أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ 0\leq u_{n+1}\leq\frac{2}{3}u_n$

0,50 ن — (ب) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متقاربة و احسب نهايتها .

② لكل n من $\mathbb{N}$ نضع : $\mathcal{S}_n=\sum_{k=0}^{n}OM_k=OM_1+\cdots+OM_n$

و لكل k من $\mathbb{N}$ نعتبر M_k صورة العدد العقدي z_k .

0,50 ن — (أ) بين أن $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ \mathcal{S}_n\leq3$.

0,50 ن — (ب) بين أن المتتالية $(\mathcal{S}_n)_{n\geq0}$ متقاربة (حساب نهاية $(\mathcal{S}_n)_{n\geq0}$ غير مطلوب)

(III) نضع $z=re^{i\theta}$ حيث $\theta]-\pi,\pi]$ و $r\epsilon\mathbb{R}_+^*$.

1,00 ن — ① بين أن : $f(z)=\frac{2}{3}r\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)e^{\frac{i\pi}{6}}$

0,50 ن — ② بين أن النقط M_1 و M_2 و ..... و M_n مستقيمية $(n\epsilon\mathbb{N}^*)$.

التمرين الثالث : (3,5 ن)

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

ليكن (Γ) المنحنى الذي معادلته $2y^2-4y-7x=0$.

0,75 ن — (I) ① بين أن (Γ) شلجم و حدد رأسه و بؤرتيه.

0,25 ن — ② أنشىء المنحنى (Γ) في المعلم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

(II) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E)\ :\ 2(y-1)^2=7x+2$.

1,00 ن — ① (أ) بين أن : $y\equiv 0[7]$ أو $y\equiv 2[7]$.

0,50 ن — (ب) استنتج أن مجموعة حلول المعادلة (E) هي :

$$S=\{(14K^2-4k\ ;\ 7k)\ /\ k\epsilon\mathbb{Z}\}\cup\{(14k^2+4k\ ;\ 7k+2)\ /\ k\epsilon\mathbb{Z}\}$$

1,00 ن — ② حدد النقط $M(x,y)$ من المنحنى (Γ) بحيث : $(x,y)\epsilon\mathbb{Z}^2$ و $x\wedge y=9$.

التمرين الرابع : (3,0 ن)

0,25 ن — ① بين أن :
$$(\forall t\epsilon\mathbb{R})\ ;\ \frac{(1+t)^2}{(1+t^2)(3+t^2)}=\frac{t}{(1+t^2)}-\frac{t}{(3+t^2)}+\frac{1}{(3+t^2)}$$

0,50 ن — ② بين أن :
$$(\forall\alpha\epsilon\mathbb{R})\ ;\ \int_0^\alpha\frac{1}{(3+t^2)}dt=\frac{1}{\sqrt{3}}Arctan\left(\frac{\alpha}{\sqrt{3}}\right)$$

③ نعتبر الدالة العددية F المعرفة على $[0,\pi]$ بما يلي :
$$\boxed{F(x)=\int_0^x\frac{1+\sin u}{2+\cos u}du}$$

0,50 ن — (أ) بين أن F قابلة للإشتقاق على $[0,\pi]$.

0,50 ن — (ب) باستعمال مكاملة بتغيير المتغير $t=\tan\left(\frac{u}{2}\right)$ بين أن :

$$(\forall x\epsilon[0,\pi[)\ ;\ F(x)=2\int_0^{\tan\frac{\pi}{2}}\frac{(1+t)^2}{(1+t^2)(3+t^2)}dt$$

نذكر أن : $\cos u=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ و $\sin u=\frac{2t}{1+t^2}$ حيث : $t=\tan\frac{u}{2}$ و $u\epsilon[0,\pi[$

0,75 ن — (ج) باستعمال السؤالين ① و ② بين أن:

$$(\forall x\epsilon[0,\pi[)\ ;\ F(x)=\ln 3+\frac{2}{\sqrt{3}}Arctan\left(\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right)+\ln\left(\frac{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{3+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right)$$

0,50 ن — (د) باستعمال اتصال الدالة F بين أن :
$$\int_0^\pi\frac{1+\sin u}{2+\cos u}du=\ln 3+\frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

التمرين الخامس : (3,0 ن)

في هذا التمرين x يرمز لعدد صحيح طبيعي أكبر أو يساوي 2

نعتبر f_n الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\boxed{f_n(x) = \frac{x}{n} - e^{-nx}}$

ليكن $(\mathscr{C}_n)$ التمثيل المبياني للدالة f_n في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

① أ) أحسب : $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$	0,50 ن
ب) أدرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى $(\mathscr{C}_n)$.	0,75 ن
② أحسب $f_n'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f_n .	0,75 ن
③ أ) بين أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n في $\mathbb{R}$.	0,50 ن
ب) بين أن : $f_n\left(\frac{1}{n}\right) < 0$	0,25 ن
ج) بين أن $e^x \geq x+1$; $(\forall x \epsilon \mathbb{R})$ ثم استنتج أن $f_n(1) > 0$.	0,75 ن
د) بين أن : $\frac{1}{n} < \alpha_n < 1$	0,50 ن
④ أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_2)$ (نأخذ : $\alpha_2 \approx 0{,}6$)	0,50 ن
⑤ أ) بين أن $(\forall n \epsilon \mathbb{N})$ بحيث $n \geq 2$ لدينا : $f_{n+1}(\alpha_n) = \frac{ne^{-(n+1)\alpha_n}}{(n+1)}\left(e^{\alpha_n} - \frac{1}{n} - 1\right)$	0,50 ن
ب) استنتج أن : $f_{n+1}(\alpha_n) \geq 0$; $(\forall n \epsilon \mathbb{N}^* - \{1\})$	0,50 ن
ج) بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ تناقصية ثم استنتج أنها متقاربة .	0,75 ن
⑥ أ) باستعمال السؤال ③ بين أن : $\frac{1}{n^2} < e^{-n\alpha_n} < \frac{1}{n}$; $(\forall n \epsilon \mathbb{N}^* - \{1\})$	0,50 ن
ب) استنتج أن : $\frac{\ln n}{n} < \alpha_n < \frac{2\ln n}{n}$; $(\forall\, n \,\epsilon\, \mathbb{N}^* \setminus \{1\})$	0,50 ن
ج) حدد : $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$	0,25 ن