استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (4,5 ن)

نعتبر في $\mathbb{R}^2$ قانون التركيب الداخلي $*$ المعرف بما يلي :

$$(\forall(a,b)\epsilon\mathbb{R}^2)\ ,\qquad (\forall(x,y)\epsilon\mathbb{R}^2)\ :\ (a,b)*(x,y)=\left(\frac{ax+by}{2},\frac{ay+bx}{2}\right)$$

لتكن المجموعة : $\boxed{E=\left\{\left(m+\frac{1}{m}\ ;\ m-\frac{1}{m}\right)\epsilon\mathbb{R}^2/\ m\epsilon\mathbb{R}^*\right\}}$

0,75 ن ① بين أن $*$ قانون تركيب داخلي في E .

② ليكن φ التطبيق المعرف على $\mathbb{R}^*$ نحو E بما يلي : $\boxed{(\forall m\epsilon\mathbb{R}^*)\ ;\ \varphi(m)=\left(m+\frac{1}{m}\ ;m-\frac{1}{m}\right)}$

0,50 ن (أ) بين أن φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,*)$.

0,75 ن (ب) استنتج أن $(E,*)$ زمرة تبادلية محددا عنصرها المحايد .

و مماثل كل عنصر $\left(m+\frac{1}{m}\ ;m-\frac{1}{m}\right)$ حيث m عدد حقيقي غير منعدم .

نعتبر المجموعة . $\boxed{F=\{(x\ ,y)\epsilon\mathbb{R}^2\ ;\ x\geq 2\ \text{ و }\ y^2=x^2-4\}}$

1,00 ن (أ) بين أن : $F=\left\{\left(m+\frac{1}{m}\ ;\ m-\frac{1}{m}\right)\ \epsilon\ \mathbb{R}^2/\ m>0\ \right\}$

1,00 ن (ب) بين أن : $(F,*)$ زمرة جزئية من $(E,*)$.

التمرين الثاني : (3,0 ن)

(I) p عدد صحيح طبيعي أولي أكبر أو يساوي 5

0,50 ن ① بين أن : $p^2\equiv 1[3]$.

0,50 ن ② (أ) باستعمال زوجية العدد p بين أنه يوجد عدد صحيح طبيعي q بحيث : $p^2-1=4q(q+1)$.

0,50 ن (ب) استنتج أن : $p^2\equiv 1[8]$.

0,50 ن ③ بين أن : $p^2\equiv 1[24]$.

(II) ليكن a عددا صحيحا طبيعيا أوليا مع العدد 24

0,50 ن ① بين أن : $a^2\equiv 1[24]$.

0,50 ن ② هل توجد أعداد صحيحة طبيعية $a_1\ ,a_2\ ,\cdots,a_{23}$ حيث :

$$\forall k\epsilon\{1,2,\ldots,23\}\ ;\ a_k\wedge 24=1\qquad \text{و}\qquad {a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_{23}}^2=23997$$

التمرين الثالث : (8,5 ن)

(I) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي :
$$\begin{cases} f(x) = (x+2)e^{\frac{-2}{x}} \quad ; \quad x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

ليكن $(\mathscr{C}_f)$ منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ ، (الوحدة $2cm$)

0,25 ن — ① أ) بين أن f متصلة على اليمين في 0 .

0,25 ن — ب) بين أن f قابلة للإشتقاق على اليمين في 0 .

0,50 ن — ج) بين أن f تزايدية قطعا على $[0,+\infty[$.

0,25 ن — ② أ) أحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

0,50 ن — ب) بين أن : $(\forall t \geq 0\ )\ ;\ 0 \leq e^{-t} + t - 1 \leq \dfrac{t^2}{2}$

0,50 ن — ج) بين أن : $(\forall x > 0\ );\ \dfrac{-4}{x} \leq f(x) - x \leq \dfrac{4}{x^2} - \dfrac{2}{x}$

0,25 ن — د) استنتج أن المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مقاربا مائلا (Δ) ينبغي تحديد معادلته .

0,50 ن — ③ أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ و المستقيم (Δ) .

(II) n عدد صحيح طبيعي غير منعدم .

نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي :
$$\begin{cases} f_n(x) = \left(x + \dfrac{2}{n}\right) e^{\frac{-2}{x}} \quad ; \quad x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

0,25 ن — ① بين أن f_n قابلة للإشتقاق على اليمين في 0.

0,50 ن — ② أدرس تغيرات الدالة f_n على المجال $[0,+\infty[$.

0,50 ن — ③ أ) بين أن لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، المعادلة : $f_n(x) = \dfrac{2}{n}$ تقبل حلا وحيدا a_n في المجال $]0,+\infty]$.

0,50 ن — ب) بين أن : $(\forall x > 0), (\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\ ;\ f_{n+1}(x) - \dfrac{2}{n+1} > f_n(x) - \dfrac{2}{n}$

0,75 ن — ج) استنتج أن المتتالية (a_n) تناقصية ثم بين أن (a_n) متقاربة .

نضع : $a = \lim\limits_{\infty} a_n$

0,50 ن — د) بين أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\ ;\ na_n = 2e^{\frac{2}{a_n}} - 2$

0,50 ن — هـ) بين أن : $a = 0$.

(III) نعتبر الدالة العددية F المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي : $F(x) = \int_x^{2x} f(t)dt$

(بحيث f هي الدالة المعرفة في الجزء الأول)

0,25 ن ① أ بين أن : $xf(x) \leq F(x) \leq xf(2x)$; $(\forall x > 0)$.

0,25 ن ب أحسب : $\lim_{x\to+\infty} F(x)$

0,50 ن ② أ بين أن F قابلة للإشتقاق على المجال : $[0,+\infty[$.

0,75 ن ب بين أن : $x > 0$; $\begin{cases} F'(x) = e^{\frac{-2}{x}}\left((x+2)\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)+(3x+2)e^{\frac{1}{x}}\right) \\ F'_d(0) = 0 \end{cases}$

($F'_d(0)$ هو العدد المشتق للدالة F على اليمين في 0)

0,50 ن ③ إعط جدول تغيرات الدالة F .

التمرين الرابع : (4,5 ن)

لكل عدد عقدي z مخالف للعدد -1 نضع : $f(z) = \dfrac{iz-1}{(z+1)^2}$

0,25 ن ① أ حدد العدد الحقيقي y بحيث : $f(iy) = iy$.

1,00 ن ب حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E) : f(z) = z$.

نرمز بـ z_0 و z_1 و z_2 لحلول المعادلة (E) حيث : $\begin{cases} \Re e(z_1) > Re(z_2) \\ \Re e(z_0) = 0 \end{cases}$

0,50 ن ② أ تحقق أن : $z_1 + 1 = e^{i\frac{11\pi}{6}}$ و $z_2 + 1 = e^{i\frac{7\pi}{6}}$

0,75 ن ب استنتج الكتابة المثلثية لكل من z_1 و z_2

③ في هذا السؤال نفترض أن : $z = e^{i\alpha}$ حيث $0 \leq \alpha < \pi$

0,50 ن أ بين أن : $\overline{f(z)} = izf(z)$.

0,25 ن ب حدد α إذا علمت أن : $f(z) + \overline{f(z)} = 0$.

0,75 ن ج أكتب $f(z)$ على الشكل $f(z) = re^{i\varphi}$ حيث : $(r,\varphi)\epsilon\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

0,50 ن ④ حدد z إذا علمت أن : $|z| = 1$ و $\Re e\big(f(z)\big) = \frac{1}{2}$.