السنة 2 بكالوريا علوم رياضية	النهايات و الاتصال حل مقترح	سلسلة 3

تمرين 1 : $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+8}}{x-1}+\dfrac{6|x|}{1-x^2}$

1) لدينا : $x\in D_f \Leftrightarrow \begin{cases} x-1\neq 0\\ 1-x^2\neq 0\\ x+8\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1\neq 0\\ (1-x)(1+x)\neq 0\\ x\geq -8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1\\ x\neq -1\\ x\geq -8\end{cases}$ منه : $D_f=[-8;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$

2) لدينا : $\forall x>1\ f(x)=\sqrt{\dfrac{x+8}{(x-1)^2}}+\dfrac{6x}{1-x^2}$

و بما أن : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{6x}{1-x^2}=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{6x}{-x^2}=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{-6}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{x+8}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{1}{x}=0$

فإن : $\boxed{\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)=\sqrt{0}+0=0}$

هناك طرق أخرى ، لكن يجب تعلم أبسط الطرق الممكنة وفق النهاية المطلوب حسابها

$$\boxed{\lim_{x\mapsto 0} f(x)=-\sqrt{8}}$$

نهاية بسيطة أدرجت بهدف التذكير بضرورة التعويض قبل أي محاولة أخرى

نعلم أن $1-x^2$ سالبة في المجال $]-1;1[$ و موجبة خارجه

و حيث أن : $\lim\limits_{x\mapsto-1}\dfrac{\sqrt{x+8}}{x-1}=\dfrac{-\sqrt{7}}{2}$ و $\lim\limits_{x\mapsto-1}6|x|=6$ فإن : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\mapsto-1\\x>-1}} f(x)=-\infty \quad (\ell+\dfrac{6}{0^-})}$ و $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\mapsto-1\\x<-1}} f(x)=+\infty}$

التعويض بالمرموز 0^+ و 0^- و $+\infty$ و $-\infty$ لا ننصح باستعمالها في الأجوبة خصوصا في الامتحان الوطني بل التعليل بمثل الطريقة أعلاه، لأنه مثلا الكتابة $\dfrac{6}{0^-}$ لامعنى لها رياضيا إنما هي طريقة لشرح الجواب و ليست جوابا بحد ذاته.

3) لدينا : $|x|=x\quad \forall x\in]0;2[$ ، إذن :

$$\begin{aligned}\lim_{x\mapsto1} f(x)&=\lim_{x\mapsto1}\frac{\sqrt{x+8}}{x-1}+\frac{6x}{1-x^2}=\lim_{x\mapsto1}\frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}+\frac{3}{x-1}-\frac{6x}{x^2-1}\\
&=\lim_{x\mapsto1}\frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}+\frac{3x+3-6x}{x^2-1}\\
&=\lim_{x\mapsto1}\frac{1}{\sqrt{x+8}+3}+\frac{3-3x}{x^2-1}=\lim_{x\mapsto1}\frac{1}{\sqrt{x+8}+3}+\frac{-3}{x+1}\\
&=\frac{1}{6}-\frac{3}{2}=\frac{-8}{6}=\frac{-4}{3}\end{aligned}$$

إذن f تقبل تمديدا بالاتصال في 1

يمكننا دائما عند حساب نهاية دالة في عدد x_0 و عند الحاجة تعويض الدالة بقصورها في المجال $]x_0-a;x_0+b[$ حيث $a>0;\ b>0$

تمرين 2 :

1) نعتبر الدالة : $f(x)=x^3+x+1$

لدينا $f(0)=1>0$ و $f(-1)=-1<0$ و f متصلة على $[-1;0]$ إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطة نستنتج أن $x^3+x+1=0$ تقبل على الأقل حلا في $[-1;0]$ و منه في IR

2) نعتبر الدالة : $g(x)=x^3+ax+b$

نعلم أن $\lim_{x\mapsto+\infty} g(x)=+\infty$ إذن حسب التعريف : $\forall A>0\ \exists x_0\in IR\ ;\ x\geq x_0 \Rightarrow g(x)>A$

نأخذ $A=1$ إذن : $\exists x_1\in IR\ ;\ x\geq x_1 \Rightarrow g(x)>1$ منه : $\exists x_1\in IR\ \ g(x_1)>1>0$

ونعلم أن $\lim_{x\mapsto-\infty} g(x)=-\infty$ إذن حسب التعريف : $\forall A<0\ \exists x_0\in IR\ ;\ x\leq x_0 \Rightarrow g(x)<A$

نأخذ $A=-1$ إذن : $\exists x_2\in IR\ ;\ x\leq x_2 \Rightarrow g(x)<-1$ منه : $\exists x_2\in IR\ \ g(x_2)<-1<0$

نضع : $a=Min(x_1;x_2)$ و $b=Max(x_1;x_2)$

الآن لدينا $f(x_1)>0$ و $f(x_2)<0$ منه : $f(a).f(b)<0$ و f متصلة على $[a;b]$ إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطة فالمعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا على الأقل في $[a;b]$ منه في IR

هناك طريقتان أخريتان على الأقل لحل التمرين أولاهما تعتمد على البرهان بالخلف مثل التمرين 6 من السلسلة 2 و الثانية تعتمد على دراسة تغيرات الدالة حسب قيم البارامتر a.

تمرين 3 : $f(x)=\dfrac{x\sqrt{x}-a\sqrt{a}}{x^2-a^2}$

لدينا :
$$\lim_{x\mapsto a} f(x)=\lim_{x\mapsto a}\frac{x\sqrt{x}-a\sqrt{a}}{x^2-a^2}=\lim_{x\mapsto a}\frac{x^3-a^3}{\left(x\sqrt{x}+a\sqrt{a}\right)\left(x^2-a^2\right)}=\lim_{x\mapsto a}\frac{x^2+ax+a^2}{\left(x\sqrt{x}+a\sqrt{a}\right)(x+a)}$$
$$=\frac{3a^2}{2a\sqrt{a}\times 2a}=\frac{3\sqrt{a}}{4a}$$

بالتالي الدالة f تمديدا بالاتصال في a

تمرين 4 :

- لدينا $\forall x>0\ \ x-1<E(x)\leq x$ منه : $\forall x>0\ \ 1-\dfrac{1}{x}<\dfrac{E(x)}{x}\leq 1$

  بما أن : $\lim_{x\mapsto+\infty} 1-\dfrac{1}{x}=\lim_{x\mapsto+\infty} 1=1$ فإن : $\lim_{x\mapsto+\infty}\dfrac{E(x)}{x}=1$

- لدينا $\forall x\in[0;1[\ \ E(x)=0$ منه : $\forall x\in]0;1[\ \ \dfrac{E(x)}{x}=0$ منه : $\lim_{\substack{x\mapsto 0\\ x>0}}\dfrac{E(x)}{x}=0$

  و بما أن : $\forall x\in[-1;0[\ \ E(x)=-1$ منه : $\forall x\in[-1;0[\ \ \dfrac{E(x)}{x}=\dfrac{-1}{x}$ منه : $\lim_{\substack{x\mapsto 0\\ x<0}}\dfrac{E(x)}{x}=+\infty$

- لدينا $\forall x>0\ \ 2x-1+3x-1<E(2x)+E(3x)\leq 2x+3x$ ، منه : $\forall x>0\ \ E(2x)+E(3x)>5x-2$

  و بما أن : $\lim_{x\mapsto+\infty} 5x-2=+\infty$ فإن: $\lim_{x\mapsto+\infty} E(2x)+E(3x)=+\infty$

- لدينا $\begin{cases}0\leq 3x<1\\ 0\leq 2x<\dfrac{2}{3}<1\end{cases} \Rightarrow x\in\left[0;\dfrac{1}{3}\right[$ إذن: $E(2x)+E(3x)=0\ \ \in\left[0;\dfrac{1}{3}\right[$

  منه : $\lim_{\substack{x\mapsto 0\\ x>0}} E(2x)+E(3x)=0$

  و $\begin{cases}-1\leq 3x<0\\ -1<\dfrac{-2}{3}\leq 2x<0\end{cases} \Rightarrow x\in\left[-\dfrac{1}{3};0\right[$ إذن : $E(2x)+E(3x)=-2\ \ \forall x\in\left[-\dfrac{1}{3};0\right[$

  منه : $\lim_{\substack{x\mapsto 0\\ x>-2}} E(2x)+E(3x)=-2$

- لدينا $\forall x>0 \quad \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}<E(\sqrt{x})\leq\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$

و بما أن : $\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}=1$ و $\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}=1$ فإن : $\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{E(\sqrt{x})}{\sqrt{x}+1}=1$

- لدينا $\Rightarrow 6\leq 3x<7$ $x\in\left[2;2+\frac{1}{3}\right[$ إذن: $E(3x)=6$ $\forall x\in\left[2;\frac{7}{3}\right[$ منه : $\lim_{\substack{x\mapsto 2\\ x>2}}E(3x)=6$

و $\Rightarrow 5\leq 3x<6$ $x\in\left[2-\frac{1}{3};2\right[$ إذن: $E(3x)=5$ $\forall x\in\left[\frac{5}{3};2\right[$ منه : $\lim_{\substack{x\mapsto 2\\ x<2}}E(3x)=5$

- لدينا $\Rightarrow 2\leq 2x<3$ $x\in\left[1;\frac{3}{2}\right[$ إذن: $\lim_{\substack{x\mapsto 1\\ x>1}}\frac{E(2x)}{x-1}=\lim_{\substack{x\mapsto 1\\ x>1}}\frac{2}{x-1}=+\infty$

و $\Rightarrow 1\leq 2x<2$ $x\in\left[\frac{1}{2};1\right[$ إذن: $\lim_{\substack{x\mapsto 1\\ x<1}}\frac{E(2x)}{x-1}=\lim_{\substack{x\mapsto 1\\ x<1}}\frac{1}{x-1}=-\infty$

- نضع : $t=\frac{1}{x}$ منه : $\lim_{x\mapsto-\infty}(x+3)\,E\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{\substack{t\mapsto 0\\ t<0}}\left(\frac{1}{t}+3\right)E(t)$

لدينا : $E(t)=-1$ $t\in[-1;0[$ منه : $\left(\frac{1}{t}+3\right)E(t)=-\left(\frac{1}{t}+3\right)$ $\forall t\in[0;1[$

منه $\lim_{x\mapsto-\infty}(x+3)\,E\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{\substack{t\mapsto 0\\ t<0}}-\left(\frac{1}{t}+3\right)=+\infty$

لاحظ الفرق الكبير بين الطريقتين في $+\infty$ و في الصفر عندما يتعلق الأمر بدالة الجزء الصحيح

كما يجب أن تعلم أنه لا يمكننا التعويض ببساطة عندما يتعلق الأمر بنهاية لدالة الجزء الصحيح في عدد صحيح و السبب أن هذه الأخيرة غير متصلة في أي عدد صحيح، لذلك نلجأ إلى تديد قصورها في مجال مفتوح يتضمن العدد المراد حساب النهاية فيه أو يكون أحد طرفي المجال.

دالة الجزء الصحيح من الدوال التي يصعب التعامل مع خواصها كان هذا التمرين محاولة لتوضيح بعض الطرق المستعملة لحساب نهايات تتضمن هذه الدالة.

تمرين 5 : $f(x)=\frac{|x^2-2x|-8}{x^2-5x+4}$

1) بعد حساب المحددة نجد: $Df=]-\infty;1[\cup]1;4[\cup]4;+\infty[$

2) لدينا : $\forall x>2 \quad x^2-2x=x(x-2)>0$

منه : $\lim_{x\mapsto+\infty}f(x)=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{x^2-2x-8}{x^2-5x+4}\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$

و $x^2-2x=x(x-2)>0$ $\forall x<0$ منه : $\lim_{x\mapsto-\infty}f(x)=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{x^2-2x-8}{x^2-5x+4}=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$

و بما أن : $\lim_{x\mapsto 1}|x^2-2x|-8=-7$ و $\lim_{x\mapsto 1}x^2-5x+4=0$ و $x^2-5x+4=(x-1)(x-4)$

منه : $x<1 \Rightarrow x^2-5x+4>0$ و $1<x<4 \Rightarrow x^2-5x+4<0$

فإن : $\lim\limits_{\substack{x\mapsto 1\\ x>1}} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\mapsto 1\\ x<1}} f(x)=-\infty$

3) لدينا : $\forall x\in[3;5]\quad x^2-2x=x(x-2)>0$ إذن : $\lim\limits_{x\mapsto 4} f(x)=\lim\limits_{x\mapsto 4}\dfrac{x^2-2x-8}{x^2-5x+4}=\lim\limits_{x\mapsto 4}\dfrac{(x-4)(x+2)}{(x-1)(x-4)}=\dfrac{6}{3}=2$

إذن الدالة f تمديدا بالاتصال في 4

لاحظ أن دالة القيمة المطلقة أيضا يجب التعامل معها في أغلب الحالات في مجالات، لكنها عكس دال الجزء الصحيح متصلة على IR لذلك يمكن التعويض فيها دائما.

تمرين 6 : $\lim\limits_{x\mapsto 1}\dfrac{x+x^2+x^3+....+x^n-n}{(2-x)^n-1}$

الطريقة 1:

$$\lim_{x\mapsto 1}\frac{x+x^2+x^3+....+x^n-n}{(2-x)^n-1}=\lim_{x\mapsto 1}\frac{(x-1)+(x^2-1)+(x^3-1)+....+(x^n-1)}{(2-x-1)\left[(2-x)^{n-1}+(2-x)^{n-2}+...+1\right]}$$

$$=\lim_{x\mapsto 1}\frac{(x-1)\left[1+(x+1)+(x^2+x+1)+(x^3+x^2+x+1)....+(x^{n-1}+x^{n-2}.+..+1)\right]}{(1-x)\left[(2-x)^{n-1}+(2-x)^{n-2}+...+1\right]}$$

$$=\frac{1+2+3+...+n}{-n}=\frac{-\dfrac{n(n+1)}{2}}{n}=\frac{-(n+1)}{2}$$

الطريقة 2:

نضع : $f(x)=x+x^2+x^3+....+x^n$ و $g(x)=(2-x)^n$

إذن : $\lim\limits_{x\mapsto 1}\dfrac{x+x^2+x^3+....+x^n-n}{(2-x)^n-1}=\lim\limits_{x\mapsto 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{g(x)-g(1)}=\lim\limits_{x\mapsto 1}\dfrac{\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}}{\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}}$

بما أن f قابل للاشتقاق على IR حيث : $\forall x\in IR\quad f'(x)=1+2x+3x^2+...+nx^{n-1}$

و g قابل للاشتقاق على IR حيث : $\forall x\in IR\quad g'(x)=-n(2-x)^{n-1}$

إذن : $\lim\limits_{x\mapsto 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=1+2+....+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

و أيضا : $\lim\limits_{x\mapsto 1}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)=-n$ بالتالي : $\lim\limits_{x\mapsto 1}\dfrac{x+x^2+x^3+....+x^n-n}{(2-x)^n-1}=\dfrac{-(n+1)}{2}$

الاشتقاق يكون مفيدا في تحديد نهايات كثيرة دون الحاج للتعميل أو استعمال طرق معقد أو طويلة.