

التمرين الأول :

أحسب النهايات التالية

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x+1}}{x}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 2\sqrt[3]{x^3+1} + 1}{3x + \sqrt{x^2+1} - 2}$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sqrt{x} - x - 1}{\sqrt{x+3} - \sqrt{3x+1}}$
$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 5x + 6) \tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(2x) \sin\left(\frac{3}{x^2}\right)$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi\sqrt{x+1})}{x}$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^2+1} - \sqrt{3x+4}$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + \sqrt[3]{1-x^3})$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 E\left(\frac{4}{x}\right)$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \sin\left(\frac{E(x)}{x^2}\right)$	$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{\arctan(\sqrt[3]{x-1} + x) - \frac{\pi}{4}}{x-1}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left(\arctan(\sqrt[3]{x+1}) - \frac{\pi}{2} \right)$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left(\sqrt[4]{x^2+3} - \sqrt{x-1} \right)$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt[4]{x^2-1}} - \frac{x}{\sqrt[4]{x^2+1}}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x^4+x^2} - \sqrt[4]{x^4-3x^2}}{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}$

التمرين الثاني :

أحسب ما يلي $\lim_{x \rightarrow +\infty} x (\arctan(3x) - \arctan(2x-1))$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[4]{x} (\sqrt[4]{x+2\sqrt{x}} - \sqrt[4]{x+1})$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 (\arctan(x+1) - \arctan x)$$

التمرين الثالث :

ليكن $n \geq 2$. نعتبر الدالة $f_n(x) = \frac{(1-x^2)^n}{(1-x)(1-x^2) \times \dots \times (1-x^n)}$

$$\text{أ. بين أن } \lim_{x \rightarrow 1} f_n(x) = \frac{2^n}{n!}$$

ب. بين أنه إذا كان n فردي فإن $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1-x^2}{1-x^n} = 0$ وإذا كان n زوجي فإن $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1-x^2}{1-x^n} = \frac{2}{n}$

$$\text{ج. استنتج أن } \lim_{x \rightarrow -1} f_n(x) = 0$$

التمرين الرابع :

نعتبر الدالة $f(x) = \sqrt{x^2 - 2\cos x + 1}$

1) بين أن $f(x) \geq x+1$ ($\forall x \in \mathbb{R}^+$) وأحسب النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x}$ واستنتج أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

التمرين الخامس :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - 1 - x}{\sqrt[3]{1-3x} - 1 + x} , \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - 1 - x + \frac{x^2}{2}}{x^3} , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2+1} - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[4]{x^4+2x^3} - \sqrt[3]{x^3-x^2} , \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^3+1}}{\sqrt{x-1} - \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^4+1}}$$

التمرين السادس :

ليكن m و a عددان حقيقيان . نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - mx + 2}{x+1} & ; \quad x > -1 \\ f(x) = \frac{\sqrt{3-x} + a}{x-2} & ; \quad x \leq -1 \end{cases}$$

1) حدد النهاية $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x)$ تبعاً لقيم العدد m

2) حدد m و a كي تكون الدالة f متصلة في النقطة -1

التمرين السابع :

لتكن f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ وبحيث : $f(0) \neq 0$ و $f(x+y) = f(x)f(y)$ ($\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$)

1) بين أن الدالة f موجبة وحدد $f(0)$

2) نفترض أن f متصلة في النقطة 0 . بين أن الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$

التمرين الثامن :

نعتبر الدالة العددية g المعرفة بما يلي : $g(x) = 2x + E(x)$

1) أحسب النهايتين $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

2) ليكن k عدد من $\mathbb{Z}$. أدرس اتصال الدالة g في النقطة k

3) أدرس اتصال g على $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ ثم أرسم المنحنى في المجال $[-2, 3]$

التمرين التاسع :

نعتبر الدالة h المعرفة بما يلي : $h(x) = E(x) + (x - E(x))^2$

1) حدد النهايتين $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$

2) أدرس اتصال الدالة h على كل من $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$

3) أرسم المنحنى على المجال $[-3, 2]$

التمرين العاشر :

نضع $f(x) = x^3 + 2x - 1$

أ. بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α وأن $0 < \alpha < 1$

ب. حدد تأطيراً للعدد α سعته $0,25$

ج. أنجز جدول إشارة $f(x)$

بين أنه يوجد عدد β من المجال $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ بحيث $\frac{1 - \sin \beta}{\beta} = 1$

لتكن f دالة متصلة على $[0, 1]$ وبحيث $f(0) = 0$ و $f(1) = 1$ بين أن $f(\alpha) = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$ ($\exists \alpha \in]0, 1[$)

بين أن المعادلة $\cos x = x$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ ثم قارن α و $\frac{\pi}{4}$

التمرين الحادي عشر :

لتكن f دالة متصلة على المجال $[0, 1]$ وبحيث $f(0) = f(1)$

1) بين أن $f(\alpha) = f\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)$ ($\exists \alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$)

2) ليكن n عدد طبيعي بحيث $n \geq 3$. بين أن $f(\beta) = f\left(\beta + \frac{1}{n}\right)$ ($\exists \beta \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$)

التمرين الثاني عشر :

1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية : أ) $\arctan x - 2 \arctan\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

ب) $2 \arctan x = \arctan \frac{2x}{1 - x^2}$ ج) $\sqrt[3]{x+3} + \sqrt[3]{4-x} = 1$